Bevegelsesmengd, kraftstøyt og kollisjonar (YF kap. 8)

Bevegelsesmengd ($\vec{p}$) (YF 8.1)

N2 for partikkel med masse m:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \underset{\substack{\text{sidan} \\ m = \text{konstant}}}{=} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

altså : $\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ "N2 på $\vec{p}$-form"

der $\boxed{\vec{p} \equiv m\vec{v}}$ $\vec{p}$: bevegelsesmengd
(nokre kjelder kan i staden bruke "impuls" eller "massefart")
(engelsk: "momentum" eller "linear momentum")

Eining: $[p] = \text{kg m/s}$

N1 på $\vec{p}$-form:

$$\sum \vec{F} = 0 \underset{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} \text{ bevart}$$

Kraftstøyt ($\vec{J}$) (engelsk: impulse) (YF 8.1)

Integralet av kraftsummen $\sum \vec{F}$ over eit tidsintervall kallast kraftstøytet $\vec{J}$:

$$\boxed{\vec{J} \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \sum \vec{F}}$$ (NB! $\sum \vec{F}$ er generelt tidsavhengig)

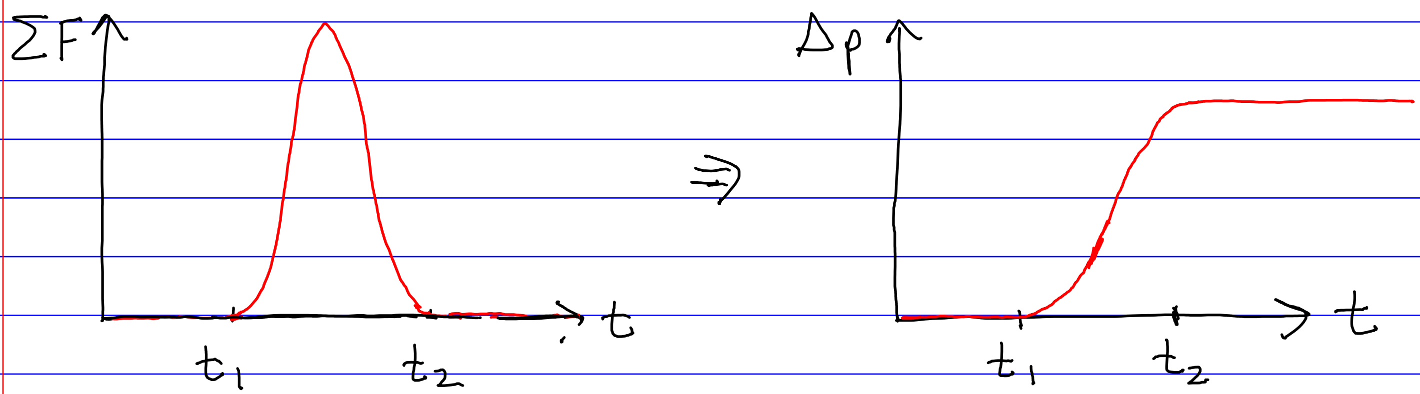
$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum \vec{F} \underset{\uparrow \, N2}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

$$= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

dvs. $$\boxed{\vec{J} = \Delta\vec{p}}$$ "Impulslova"
(med ord: kraftstøytet er lik endringa i bevegelsesmengd)

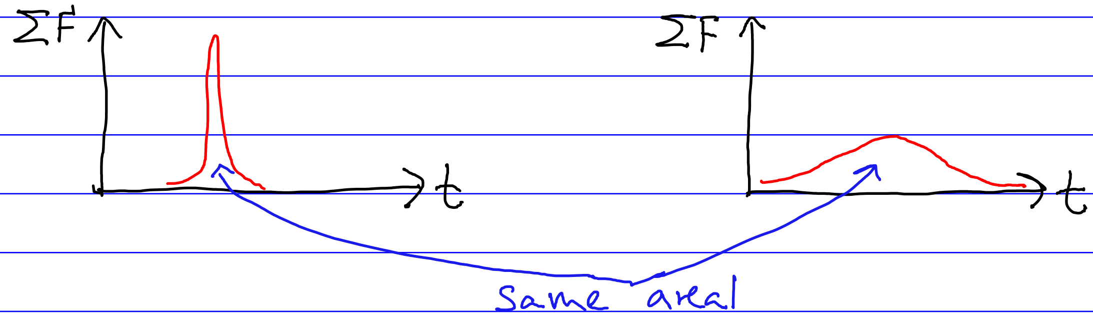
I mange situasjonar kan $\sum \vec{F}$ endre seg raskt over ein kort tidsperiode.

Eks: sparke ein ball



Kraftstøytet er bestemt av arealet under $\Sigma F(t)$ (men neg. F gir neg. bidrag)

$\Rightarrow$ ei stor kraft som verkar over ei kort tid kan gi same kraftstøyt som ei lita kraft som verkar over lang tid:

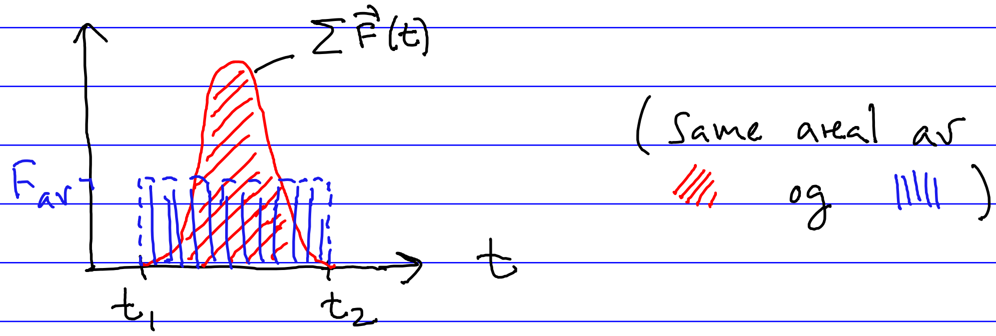


Særleg for krefter som endrar seg raskt kan det vere vanskeleg å beskrive $\Sigma \vec{F}(t)$ nøyaktig. Men for utrekning av $\vec{J}$ er det kun <u>gjennomsnittskrafta</u> $\vec{F}_{av}$ som betyr noko:

$$\vec{J} = \int \Sigma \vec{F}(t)\, dt \equiv \vec{F}_{av} \cdot (t_2 - t_1)$$

definisjon av $\vec{F}_{av}$

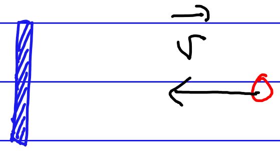
Geometrisk:



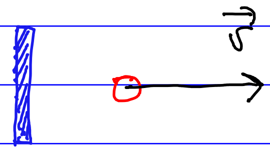
$$\vec{F}_{av} \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\Delta t} = \vec{J} = \underbrace{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}_{\Delta \vec{p}} \Rightarrow \vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Eks: Slag med tennisracket på tennisball

Før:



Etter:



Anta:

$m_{ball} = 56\,g$

$v_{etter} = -v_{før}$

$= 50\ m/s$

Anta vidare at racketen er i kontakt med ballen i ei tid $\Delta t \simeq 0.01\ s$

$$\Rightarrow \quad F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_{ball}(v_{etter} - v_{før})}{\Delta t}$$

$$= 2 \cdot \frac{0.056\ kg \cdot 50\ m/s}{0.01\ s} \simeq \underline{560\ N}$$

Tyngdekrafta verkar også: $m_{ball}\, g \approx 0.056 \cdot 10\ N$

$= 0.56\ N$

dvs. tyngdekrafta $<<$ kraft frå racket (ein faktor 10^3 mindre i dette eksempelet)

Dette var eit eksempel på ein <u>kollisjon</u> (mellom ball og racket); vi skal sjå meir på kollisjonar litt seinare.

Bevaring av bevegelsesmengd (YF 8.2)

Sjå på eit system av to lekamar A og B

La oss først anta at dei einaste kreftene som verkar er krefter mellom lekamane (som vi refererer til som interne eller indre krefter) N2 for kvar lekam gir då

$$\vec{F}_{B \text{ på } A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad \text{og} \quad \vec{F}_{A \text{ på } B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

Addering av likningane gir

$$\underbrace{\vec{F}_{B \text{ på } A} + \vec{F}_{A \text{ på } B}}_{=0 \text{ pga. N3}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right)$$

Definér $\boxed{\vec{p} \equiv \vec{p}_A + \vec{p}_B}$ Total bevegelsesmengd for systemet

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \, , \quad \text{dvs.} \quad \boxed{\vec{p} \text{ er bevart}} \qquad (*)$$

Bevaringslova (*) held også for det meir generelle tilfellet når også eksterne (ytre) krefter er til stades, dersom netto ytre kraft

$$\sum \vec{F}_{ytre} \equiv \sum \vec{F}_{ytre \text{ på } A} + \sum \vec{F}_{ytre \text{ på } B}$$

er null.

Bevis:
$$\sum \vec{F}_{\text{ytre på } A} + \vec{F}_{B \text{ på } A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \text{(N2-A)}$$
$$\sum \vec{F}_{\text{ytre på } B} + \vec{F}_{A \text{ på } B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \qquad \text{(N2-B)}$$

Addér $\Rightarrow$

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{\text{ytre på } A} + \sum \vec{F}_{\text{ytre på } B}}_{= \sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0} + \underbrace{\vec{F}_{B \text{ på } A} + \vec{F}_{A \text{ på } B}}_{= 0 \text{ pga. N3}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Eit system med kun indre krefter blir ofte kalla eit isolert system, men dette omgrepet kan også bli brukt på meir generelle system som også er påverka av ytre krefter men der $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$. Total bevegelsesmengd er bevart for alle slike system.

Merk at bevaring av total bevegelsesmengd $\vec{p}$ er gyldig uansett om kreftene er konservative eller ikkje. (I kontrast er bevaring av total mekanisk energi $K + U$ kun gyldig for konservative krefter.)

For system med eit vilkårleg antal lekamar $A, B, C, D, \ldots$ er også total bevegelsesmengd

$$\vec{p} \equiv \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \vec{p}_D + \cdots$$

bevart dersom netto ytre kraft $\sum \vec{F}_{\text{ytre}}$ på systemet er null. (Beviset er ei rett-fram generalisering av beviset over for system med to lekamar. Summen av indre krefter er igjen null pga. N3: Indre krefter kansellerer parvis.)

Kollisjonar (YF 8.3)

Uttrykket "kollisjon" er velkjent, og mange døme kan gjevast (kollisjon mellom to bilar, kollisjon mellom to biljardkuler, etc.). Litt meir formelt:

Kollisjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ ein sterk vekselverknad mellom to lekamar som varer i relativt kort tid

"Sterk" betyr $\left|\vec{F}_{\substack{A \text{ på } B \\ B \text{ på } A}}\right| \gg \left|\sum \vec{F}_{\text{ytre}}\right|$

(eks: for kollisjon mellom racket og tennisball (s.4) fann vi $|\vec{F}_{\text{racket}}| \gg |m\vec{g}|$ på s. 4)

Endringa i bevegelsesmengd $\Delta\vec{p}_A$, $\Delta\vec{p}_B$ for lekamane er då til veldig god tilnærming bestemt av kreftene mellom lekamane (indre krefter); ytre krefter er neglisjerbare i forhold.

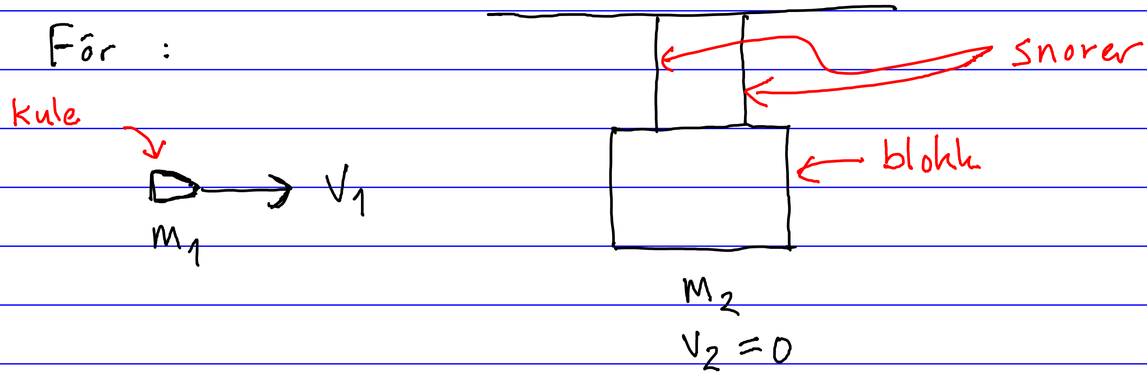
$\Rightarrow$ total bevegelsesmengd $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ er bevart i kollisjonar

Typar kollisjonar:

- <u>Elastisk kollisjon</u>: Total kinetisk energi K er også bevart, dvs. $K_{\text{etter}} = K_{\text{før}}$ (skjer når kreftene mellom lekamane er konservative)
- <u>Uelastisk kollisjon</u>: Total kinetisk energi K blir redusert i kollisjonen, dvs. $K_{\text{etter}} < K_{\text{før}}$ (dersom lekamane heng saman og beveger seg som éin lekam etter kollisjonen kallast den <u>fullstendig uelastisk</u>.)

Eksempel (Ex. 8.8 i YF)

Før :



Kula blir sitjande fast i blokka $\Rightarrow$ $v_1' = v_2'$
(fullstendig uelastisk kollisjon)

Etter kollisjonen svingar blokk + kule opp til ei høgde h.

Kva er v_1? (uttrykt vha. m_1, m_2, h)

Bevaring av bevegelsesmengd i kollisjonen:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Bruk $v_2 = 0$ og $v_1' = v_2'$ $\Rightarrow$ $v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2'$

Finn v_2' ved å bruke bevaring av mekanisk energi $K + U$ i svingebevegelsen etter kollisjonen:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2'^2 = (m_1 + m_2) g h \Rightarrow v_2' = \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}}}$$

Endring av kinetisk energi i kollisjonen:

$$\Delta K = K_{etter} - K_{før}$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2'^2 \underbrace{\left[1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1}\right]}_{<0}$$

< 0, dvs. <u>tap</u> av kinetisk energi

Eit alternativt eksempel basert på same system: kula blir ikkje sitjande fast i blokka, men passerer gjennom den og kjem ut med ein fart $v_1' = \frac{1}{2} v_1$ mot høgre. v_2' kan igjen finnast frå bevaring av mek. energi <u>etter</u> kollisjonen, og v_1 frå bevaring av total bevegelsesmengd i kollisjonen. Kan verifisere at $\Delta K < 0$ ved direkte utrekning $(m_2 \gg m_1)$.

Massesenter (YF 8.5)

Massesenter (engelsk: "center of mass" = c.m.; er det same som tyngdepunktet til ein lekam)

Anta at vi har eit system av fleire partiklar med massar $m_1, m_2, \ldots$ og posisjonar $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ (systemet kan t.d. vere ein lekam som består av desse partiklane). Då er massesenteret $\vec{r}_{cm}$

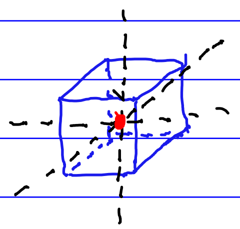
$$\boxed{\vec{r}_{cm} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}}$$

Massesenter/tyngdepunkt

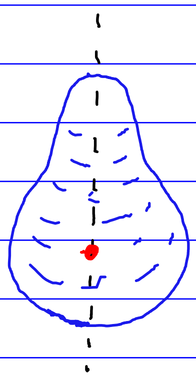
der $M = \sum_i m_i$ er den totale massen til systemet.

Dersom ein lekam er homogen (dvs. massetettleiken varierer ikkje over lekamen) og har ein symmetriakse, vil c.m. liggje på symmetriaksen

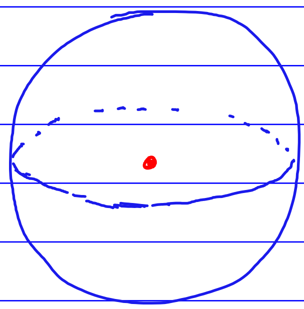
Eks:



kubisk symmetri



sylindersymmetri



Kulesymmetri (alle aksar gj. c.m. er symm. aksar)

Definér $\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$: hastigheiten til massesenteret

Tidsderivasjon av definisjonen av $\vec{r}_{cm}$ gir då

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M}$$

sidan $\sum_i m_i \vec{v}_i \equiv \vec{P}$ er den totale bevegelsesmengda til systemet. Dvs.

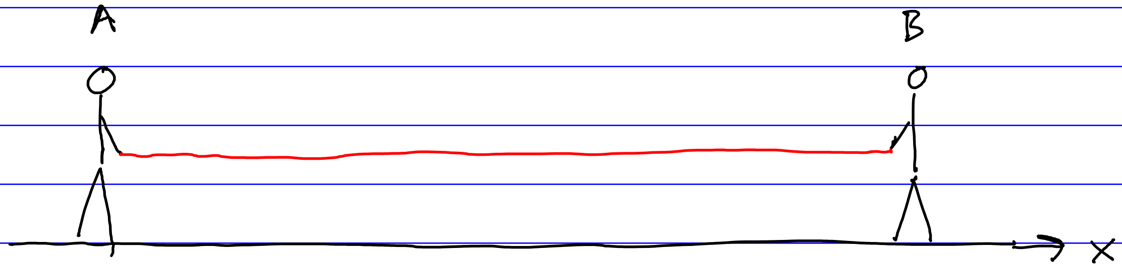
$$\vec{P} = M \vec{v}_{cm}$$

m.a.o. den totale bevegelsesmengda til systemet er den same som for ein partikkel med masse $M = \sum_i m_i$ og same hastigheit $\vec{v}_{cm}$ som massesenteret til systemet.

Dersom $\sum \vec{F}_{ytre}$ på systemet er 0, er $\vec{P}$ konstant (dette følgjer frå diskusjonen om bevaring av bev. mengd; sjå spesielt nederst på s. 6) og dermed er også $\vec{v}_{cm}$ konstant, dvs. massesenteret bevegar seg i ei rett linje med konstant fart (sjølv om dei individuelle partiklane i systemet kan ha meir kompliserte bevegelsar).

Eks: (Ex. 8.14 i YF)

To personar A og B står på ei friksjonsfri overflate. Dei held i kvar sin ende av eit lett tau og byrjar å dra. Korleis endrar posisjonane x_A og x_B seg i høve til kvarandre?



Vi ser på dei to personane + tauet som eit system.

Null friksjon $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ytre} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ = konstant

= 0 i dette eksempelet sidan $\vec{v}_A = \vec{v}_B = 0$ i starten

$\Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{r}_{cm}$ = konstant

$\Rightarrow \quad x_{cm}$ = konstant

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$\Rightarrow \quad x_B = \frac{(m_A + m_B)x_{cm} - m_A x_A}{m_B}$$

Taleksempel: $m_A = 90$ kg, $m_A = 60$ kg, og dei står opprinneleg 20 m frå kvarandre, dvs. $x_A = -10$ m, $x_B = 10$ m (når vi legg origo midt mellom dei)

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{90 \cdot (-10) + 60 \cdot 10}{90 + 60} \text{ m} = \underline{\underline{-2 \text{ m}}}$$

dvs. massesenteret er nærast den tyngste personen, som forventa.

Dersom etter ei stund person A har flytta seg 6 m til høgre (dvs. $x_A = -4$ m), er

$$x_B = \frac{(60+90) \cdot (-2) - 90 \cdot (-4)}{60} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

dvs. person B har flytta seg 9 m til venstre.

<u>Newtons 2. lov for eit system av partiklar</u>

Vi har vist at

$$M \vec{v}_{cm} = \vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots$$

Ved å ta den tidsderiverte av begge sider av likninga får vi

$$M \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \cdots$$

akselerasjonen til c.m.

$$= \left(\sum \vec{F}\right)_1 + \left(\sum \vec{F}\right)_2 + \cdots$$

$$= \left(\sum \vec{F}\right)_{1,\text{indre}} + \left(\sum \vec{F}\right)_{1,\text{ytre}} + \left(\sum \vec{F}\right)_{2,\text{indre}} + \left(\sum \vec{F}\right)_{2,\text{ytre}} + \cdots$$

$$= \sum \vec{F}_{indre} + \sum \vec{F}_{ytre} = \sum \vec{F}_{ytre}$$

fordi indre krefter i systemet kansellerer parvis pga. N3, som gir $\sum \vec{F}_{indre} = 0$. Dermed:

$$(*) \qquad \boxed{\sum \vec{F}_{ytre} = M \vec{a}_{cm}}$$

N2 for eit system av partiklar

dvs. massesenteret bevegar seg som om all masse er samla i det punktet og ei netto ytre kraft verkar på det punktet. Indre krefter påverkar ikkje bevegelsen til c.m.

(Sjølv om det er først no vi har utleia (*), som er N2 for eit system av partiklar, har vi brukt (*) kvar gong vi har analysert bevegelsen til lekamar med N2. Som (*) viser er det kun ytre krefter som kjem inn i analysen; indre krefter i lekamen kansellerer.)

Ved å bruke at

sidan M konst.

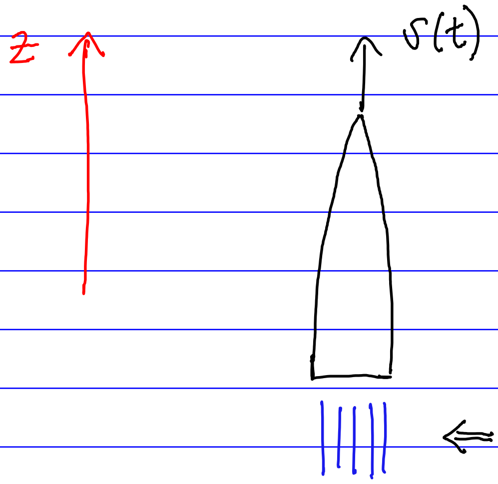
$$M \vec{a}_{cm} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M \vec{v}_{cm}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

kan (*) alternativt skrivast på forma

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ytre} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

(og igjen ser vi at $\sum \vec{F}_{ytre} = 0$ impliserer $\vec{P} = \text{konstant}$)

Rakettbevegelse



Raketten bevegar seg i pos. z-retn. med hastigheit $v(t)$

$m(t)$: masse av rakett + drivstoff i raketten ved tida t

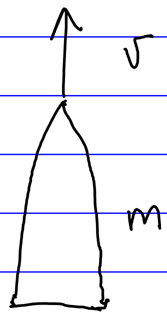
$\Leftarrow$ brent drivstoff (gass) blir slengt ut bak raketten $\Rightarrow$ $m(t)$ minkar med tida t

N2 gjeld for system med konstant masse. Vi kan difor ikkje bruke N2 på massen $m(t)$ som varierer med tida. I staden bruker vi N2 (på forma $\sum \vec{F}_{ytre} = d\vec{p}/dt$) på konstant-masse-systemet som består av partiklane som utgjer $m(t)$ ved ei viss tid t.

(bevegelsen er 1-dimensjonal $\Rightarrow$ dropp vektorteikna)

$$dp = p(t+dt) - p(t) \equiv p' - p$$

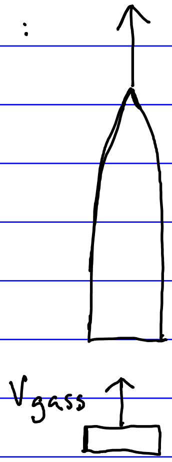
Ved tida t:



totalmasse m

$$p = mv$$

Ved tida t':



$v' = v + dv$

$m' = m + dm \quad (< m)$

$m_{gass} = -dm \quad (> 0)$

Same total-masse: $(m+dm) + (-dm) = m$

NB! $dm < 0$ sidan $m(t)$ <u>minkar</u>

$v_{gass} = v' - u_{ex}$ der $u_{ex} > 0$ er relativhastigheiten mellom raketten og gassen

$$p' = m'v' + m_{gass} v_{gass}$$

$$= (m + dm) v' + (-dm)(v' - u_{ex}) = m v' + dm\, u_{ex}$$

$$\Rightarrow dp = p' - p = m(v' - v) + dm\, u_{ex} = m\, dv + dm\, u_{ex}$$

N2: $\sum F_{ytre} = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} u_{ex}$

$\frac{dm}{dt} \equiv -\beta \quad (\beta > 0)$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{dv}{dt} = \sum F_{ytre} + \beta u_{ex}}$$

"Rakettlikninga"

βu_{ex} : skyvekraft pga. utslengt gass

$\sum F_{ytre} \begin{cases} \approx 0 & \text{i verdsrommet} \\ = -mg & \text{ved oppskyting} \end{cases}$

Treng $\beta u_{ex} > mg$ for å få akselerasjon $dv/dt > 0$

Ynskjer stor β og stor u_{ex} for å få stor akselerasjon.