



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

BOKMÅL

EKSAMEN i TFY4108 FYSIKK

Eksamensdato: Fredag 14. desember 2012

Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, John Ove Fjærestad, tlf. 979 40 036 / 7359 3448

Tillatte hjelpemidler (kode C):

Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne.

K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver).

Sensurdato: Innen 14. januar 2013.

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen.

I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellista for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten.

Oppgave 2-5 er om klassisk mekanikk. Formellista for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Noen generelle merknader:

- Symboler blir skrevet i kursiv (f.eks. m for en masse), mens enheter blir skrevet uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

Oppgave 1. (teller 25 %)

En partikkel med masse m er i en potensialbrønn. Den potensielle energien er

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq L, \\ \infty & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L. \end{cases}$$

Den normerte bølgefunksjonen for den stasjonære tilstanden med lavest energi (grunntilstanden) har romlig del

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} & \text{for } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

a) Bestem grunntilstandsenergien.

b) Bestem sannsynligheten for å finne partikkelen i posisjonsintervallet mellom $x = L/4$ og $x = 3L/4$.

c) Det blir oppgitt at for grunntilstanden er (i) $\langle x \rangle = L/2$ og (ii) $\langle p \rangle = 0$. Uten å eksplisitt regne ut noe integral, gi et argument for å underbygge enten (i) eller (ii).

d) Regn ut $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$ for grunntilstanden. Finn usikkerhetene Δx og Δp .

e) Bestem verdien av produktet $\Delta x \Delta p$. Kommentér resultatet.

Oppgitte resultater for kvantemekanikk:

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengde	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x, p)$	$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p})$

Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

Forventningsverdi: $\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x, t) \hat{F} \Psi(x, t)$.

Usikkerhet: $\Delta F = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}$.

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Eigenverdiligning: $\hat{F}\Theta_\alpha(x) = f_\alpha \Theta_\alpha(x)$.

Noen integraler:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 z \, dz &= \frac{1}{2}(z - \sin z \cos z) + C \\ \int z^2 \sin^2 z \, dz &= \frac{1}{24}[4z^3 + (3 - 6z^2) \sin 2z - 6z \cos 2z] + C \end{aligned}$$

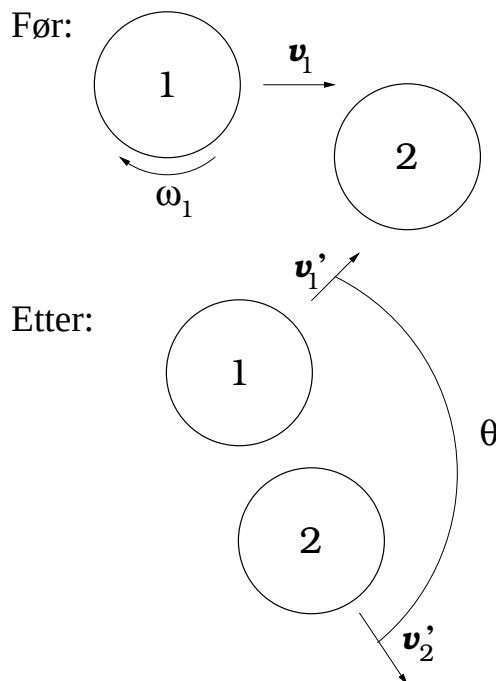
Oppgave 2. (teller 15 %)

En partikkel med masse m blir skutt inn mot et medium med en fart v_0 . Inne i mediet blir farten til partikkelen dempet som

$$v_x(t) = v_0 e^{-bt/m}$$

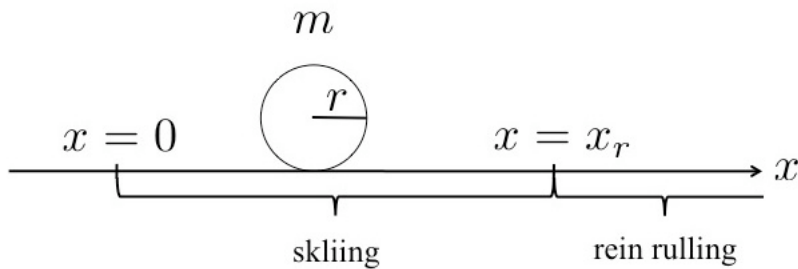
der b er en konstant.

- a) Finn et uttrykk for den kraften F_x som gir fartsdempningen. Kan du fra svaret gi en fysisk tolkning av størrelsen b ?
- b) Finn partikkelens posisjon $x(t)$ i mediet. Hvor langt klarer partikkelen å trenge inn i mediet?

Oppgave 3. (teller 15 %)

To identiske sirkulære skiver kolliderer på et friksjonsfritt underlag. Kollisjonen er (delvis) uelastisk. Før kollisjonen ligger skive 2 i ro mens skive 1 har hastighet $\vec{v}_1$. Etter kollisjonen har skive 1 og 2 hastigheter $\vec{v}'_1$ og $\vec{v}'_2$ (se figur, der vi ser systemet ovenfra).

- a) Forklar hvorfor total kinetisk energi E_k for de to skivene ikke er bevart i kollisjonen. Forklar videre hvorfor total bevegelsesmengde $\vec{p}$ for de to skivene er bevart.
- b) Ta utgangspunkt i bevaring av bevegelsesmengde (tips: kvadrer ligningen!) og vis at den kinetiske *translasjonsenergien* E_k^{trans} kan minke, øke, eller forbli uendret som følge av kollisjonen, avhengig av vinkelen θ mellom de to sluthastighetene (se figur). Hvordan vil du forklare at translasjonsenergien kan øke i en slik kollisjon?

Oppgave 4. (teller 30 %)

I denne oppgaven skal du analysere bevegelsen til en bowlingkule på en bowlingbane. Kula har masse m og radius r . Vi bruker posisjonen x til kulas massesenter for å spesifisere hvor kula er. Den kinetiske friksjonskoeffisienten er μ_k .

Etter å ha landet på underlaget (bowlingbana) ved posisjonen $x = 0$ med en fart $v_0 > 0$ men med null rotasjonshastighet, sklir kula på underlaget mens rotasjonshastigheten gradvis øker. Når kula kommer til posisjonen $x = x_r$ er sklifasen over og kula begynner å rulle rent med farten v_r (indeksen r står her for ren rulling).

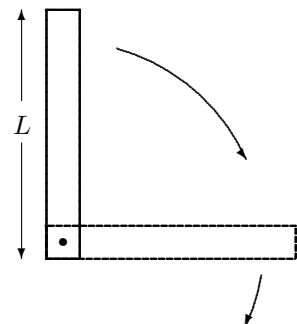
- Finn et uttrykk for akselerasjonen a til kula i sklifasen. Bestem hastigheten v som funksjon av tiden t når kula sklir.
- Velg z -aksen inn i planet på figuren. Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen α_z i sklifasen. Bestem rotasjonshastigheten ω_z som funksjon av tiden t når kula sklir.
- Bruk resultatene i a) og b) til å vise at kula begynner å rulle rent ved tiden $t_r = 2v_0/(7\mu_k g)$ etter at kula landet på underlaget. Bestem avstanden x_r . Vis at rullehastigheten er $v_r = (5/7)v_0$.
- Se på totalspinnet $\vec{L}$ til kula, definert med punktet $x = 0$ på underlaget som referansepunkt. Med utgangspunkt i kreftene som virker på kula, vis at $\vec{L}$ er bevart under kulas bevegelse på underlaget.
- La $L_z(x)$ være spinnet langs z -aksen når kulas massesenter har posisjon x . Bruk spinnbevaring til å sette opp en ligning $L_z(0) = L_z(x)$, og bruk denne til å gi en alternativ utledning av resultatet $v_r = (5/7)v_0$.

Oppgave 5. (teller 15 %)

En uniform (jevntykk) tynn stang har lengden L og massen M . Den er dreibar om en horisontal, friksjonsløs akse (z -aksen) som går gjennom den ene enden. Stanga blir frigjort fra ro (ved å gi den et neglisjerbart puff) i sin vertikale posisjon, og den vil da falle ned med en rotasjonsbevegelse. Prinsippet er vist i figuren, men her er ikke akslingen helt på enden av stanga og stanga er ikke tynn. Du kan anta som kjent at stangas treghetsmoment om aksen er $I = (1/3)ML^2$.

For det øyeblikket at stanga er i *horisontal* posisjon:

- Bestem stangas vinkelfart ω .
- Vis at størrelsen på stangas vinkelakselerasjon er $\alpha = \frac{3g}{2L}$.



Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad c = 2,9997 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å = 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{der} \quad \vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \vec{\alpha}: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Newtons gravitasjonslov: } \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad E_p(r) = -G \frac{M}{r} m \quad G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\text{Arbeid: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{Kinetisk energi: } E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p(\vec{r}) = \text{potensiell energi (tyngde: } mgh, \text{ fjær: } \frac{1}{2}kx^2) \quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$$

$$\text{Konservativ kraft: } \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r}) \quad \text{f.eks. } F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_p(x, y, z) \quad \text{Hookes lov (fjær): } F_x = -kx$$

$$\text{Tørr friksjon: } |F_f| \leq \mu_s F_\perp \text{ eller } |F_f| = \mu_k F_\perp \quad \text{Våt friksjon: } \vec{F}_f = -k_f \vec{v} \text{ eller } \vec{F}_f = -bv^2 \hat{v}$$

$$\text{Kraftmoment (dreiemoment): } \vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}, \text{ med } \vec{r}_0 \text{ som valgt referansepunkt} \quad \text{Arbeid: } dW = \tau d\theta$$

$$\text{Betingelser for statisk likevekt: } \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Sigma \vec{\tau}_i = \vec{0}, \text{ uansett valg av referansepunkt } \vec{r}_0 \text{ i } \vec{\tau}_i$$

$$\text{Massesenter (tyngdepunkt): } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad M = \sum m_i$$

$$\text{Kraftimpuls: } \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt = m\Delta \vec{v} \quad \text{Alle støt: } \sum \vec{p}_i = \text{konstant} \quad \text{Elastisk støt: } \sum E_i = \text{konstant}$$

$$\text{Vinkelhastighet: } \vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}} \quad |\vec{\omega}| = \omega = \dot{\phi} \quad \text{Vinkelakselerasjon: } \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt \quad \alpha = d\omega/dt = \ddot{\phi}$$

$$\text{Sirkelbev.: } v = r\omega \quad \text{Sentripetalaks.: } \vec{a} = -v\omega \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2 \hat{\mathbf{r}} \quad \text{Baneaks.: } a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\text{Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad \text{stive legemer: } \vec{L} = I \vec{\omega} \quad \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{Rotasjonsenergi: } E_{k, \text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$$\text{der treghetsmoment } I \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm \quad \text{med } r = \text{avstanden fra } m_i \text{ (dm) til rotasjonsaksen.}$$

Med aksens gjennom massemiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$, og da gjelder:

$$\text{kule: } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \quad \text{sylder/skive: } I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{Åpen sylinder/ring: } I_0 = MR^2$$

$$\text{lang, tynn stav: } I_0 = \frac{1}{12} M\ell^2 \quad \text{Parallellaksesteoremet (Steiners sats): } I = I_0 + Mb^2$$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{r}$,
og tyngdepunksbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = d\vec{R}/dt)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0 \vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\vec{\tau}_{\text{tot}} = d\vec{L}_{\text{tot}}/dt$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, der $\sin \theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta)$ med $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+ e^{-\alpha^{(+)} t} + A^- e^{-\alpha^{(-)} t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \text{der} \quad x_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

“Rakettlikningen”: $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_Y + \beta \vec{u}_{\text{ex}}$ der $\beta = \frac{dm}{dt}$ og $\vec{u}_{\text{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse