

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4108 Fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad

Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 18. desember 2013

Eksamenstid (fra-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne

K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver)

Annen informasjon:

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen. I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt i en oppgave selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellisten for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten. Oppgave 2-4 er om klassisk mekanikk. Formellisten for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (inkludert forside og vedlegg): 6

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 (teller 25 %)

En partikkel med masse m er i en uendelig dyp potensialbrønn med lengde L . Anta at tilstanden til partikelen er gitt av bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x, t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x, t) \quad (1)$$

der $\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$ er bølgefunksjonen for en stasjonær tilstand med kvantetall n ($n = 1, 2, \dots$), med

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} & \text{for } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L, \end{cases} \quad (2)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}. \quad (3)$$

Settet av funksjoner $\psi_n(x)$ er ortonormalt, dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^*(x) \psi_n(x) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{dersom } m = n \\ 0 & \text{dersom } m \neq n. \end{cases} \quad (4)$$

a) Vis at bølgefunksjonen $\Psi(x, t)$ er normert.

b) Hva er sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi skal gi verdien E_n ($n = 1, 2, \dots$)?

c) Bestem $\langle E \rangle$.

d) Vis at $\langle x \rangle = L/2 - A \cos \omega t$, dvs. $\langle x \rangle$ oscillerer harmonisk med tiden omkring midtpunktet $L/2$ i brønnen. Hva blir amplituden A og vinkelfrekvensen ω ? (I utregningen kan du anta som kjent at for en vilkårlig stasjonær tilstand er $\langle x \rangle = L/2$.)

e) Bestem $\langle p \rangle$.

Oppgitte resultater for oppgave 1 som kan være nyttige (listen fortsetter på neste side):

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengde	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x, p)$	$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p})$

Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

Løsning av TASL: $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_nt/\hbar}$ der $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \Psi(x, 0)$.

Normeringskrav: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = 1$, $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

Forventningsverdi, fra sannsynlighetsfordelingen:

$$\langle g(F) \rangle = \sum_F g(F) P(F) \quad (\text{diskret}), \quad \langle g(F) \rangle = \int dF g(F) P(F) \quad (\text{kontinuerlig}).$$

Forventningsverdi, fra bølgefunksjonen: $\langle g(F) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x, t) g(\hat{F}) \Psi(x, t).$

Ehrenfests teorem: $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m}, \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\langle \frac{dU}{dx} \rangle.$

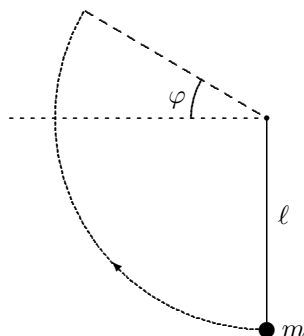
Eigenverdiligning: $\hat{F}\Theta_{\alpha}(x) = f_{\alpha}\Theta_{\alpha}(x).$

Sannsynlighet(stetthet) for at en måling av observabelen F gir verdien f_{α} : $\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{\alpha}^*(x) \Psi(x, t) \right|^2.$

Et integral: $\int_0^{\pi} dy y \sin y \sin 2y = -\frac{8}{9}.$

Oppgave 2 (teller 20 %)

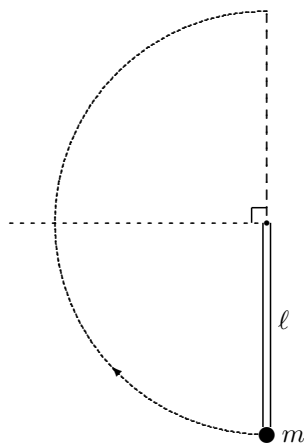
Denne oppgaven involverer en kule med masse m . Du kan neglisjere kulas utstrekning, dvs. modellér kula som en punktpartikkel.



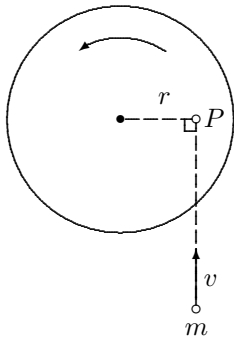
Vi henger kula i en masseløs snor med lengde ℓ som er festet i et opphengningspunkt. Når kula henger rett ned får den et slag mot venstre slik at den begynner å bevege seg i en sirkelbane. Anta at kula svinger forbi horisontallinjen gjennom opphengningspunktet og at ved en viss vinkel φ (se figuren) blir snorkrafta null (dette impliserer at kula deretter ikke følger en sirkelbane, noe som imidlertid *ikke* er av betydning for å løse oppgaven).

a) Vis at ved vinkelen φ der snorkrafta blir null, er farten til kula gitt som $v = \sqrt{g\ell \sin \varphi}$.

b) Bestem hvordan vinkelen φ avhenger av den kinetiske energien K_0 kula fikk i slaget. [Det er godt nok at du finner et uttrykk som involverer $\sin \varphi$, ikke φ selv.] Hvor stor må K_0 være for at kula skal såvidt nå punktet i sirkelbanen som er vertikalt over opphengningspunktet (som svarer til $\varphi \rightarrow 90^\circ$)?



c) Anta nå at svingeeeksperimentet gjentas, men med snora byttet ut med en tynn stav av samme lengde. Vi antar at staven er lett nok i forhold til kula til at stavens masse kan neglisjeres. Kula og staven svinger altså som et stivt legeme med en masse lik kulemassen. Hvor stor må den kinetiske energien K_0 i bunnen av banen nå være for at svingebevegelsen skal såvidt nå sirkelbanens toppunkt (dvs. $\varphi \rightarrow 90^\circ$)? Sammenlign svaret med verdien av K_0 funnet i **b)** og kommentér forskjellen.

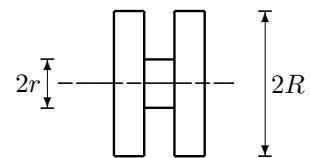
Oppgave 3 (teller 20 %)

a) På en lekeplass er det en enkel "karusell" med treghetsmoment I_0 om rotasjonsaksen. Karusellen roterer med vinkelhastighet ω_0 mot klokka. Så kommer et barn med masse m løpende med hastighet v , hopper og lander i punktet P på karusellen i en avstand r fra sentrum (se figuren, sett ovenfra). Barnet roterer deretter sammen med karusellen. Hva blir den felles vinkelhastigheten ω til karusell + barn? (Se på barnet som en punktpartikkel.)

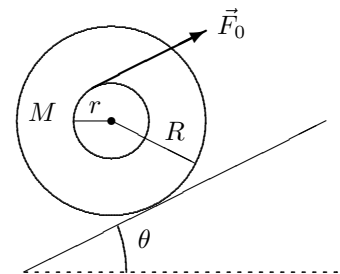
b) Karusellens massesenter er på rotasjonsaksen. Hva blir endringen $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{etter}} - \vec{p}_{\text{før}}$ i bevegelsesmengden til systemet (karusell + barn)? Her refererer 'før' og 'etter' til tidspunktet hhv. like før og like etter landingen. Hva blir retningen på den ytre kraften som virker på karusellen ved aksen under landingen?

Oppgave 4 (teller 35 %)

En jojo har masse M og ytre radius R , mens senterpinnen, med neglisjerbar masse, har radius r (se figur til høyre). Treghetsmomentet om rotasjonsaksen gjennom massesenteret er derfor, i rimelig tilnærming, $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.



Jojoen plasseres på et skråplan med helningsvinkel θ (se figur til høyre). Snorkraften F_0 virker oppover, parallelt med skråplanet, og har en størrelse som gjør at jojoen er i ro.



a) Skriv ned likevektsbetingelsene som må være oppfylte for at jojoen skal holde seg i ro. Bruk betingelsene til å bestemme størrelsen på kraften F_0 og størrelse og retning på friksjonskraften f_0 .

b) Hvor stor må den statiske friksjonskoeffisienten μ_s mellom jojo og underlag være for at likevekten skal være mulig ved den gitte helningsvinkelen θ ?

c) Snorkraften (med samme retning som før) økes nå til F ($> F_0$), slik at jojoen akselererer oppover skråplanet. Anta ren rulling. Bestem akselerasjonen a til massesenteret og friksjonskraften f . Vis fra uttrykket for f at friksjonskraftens retning kan endre seg med F dersom r/R er mindre enn en bestemt verdi.

I resten av oppgaven antar vi at underlaget er flatt, dvs. $\theta = 0$, og at vi fortsatt har ren rulling. Det oppgis at da er akselerasjonen til massesenteret pga. snorkraften F (som har retning parallelt med underlaget) lik

$$a = \frac{2F(1 + r/R)}{3M}. \quad (5)$$

d) Anta at jojoen startet fra ro ved tiden $t = 0$. Finn et uttrykk for jojoens kinetiske energi K ved en tid $t > 0$.

e) Finn avstanden s massesenteret har forflyttet seg og vinkelen θ jojoen har rotert ved tiden t . Vis at man kan skrive den kinetiske energien som $K = Fs + rF\theta$ og gi en tolkning av hvert av de to leddene på høyre side.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad c = 2,9997 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å = 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{der} \quad \vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \vec{\alpha}: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Newtons gravitasjonslov: } \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad E_p(r) = -G \frac{M}{r} m \quad G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\text{Arbeid: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{Kinetisk energi: } E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p(\vec{r}) = \text{potensiell energi (tyngde: } mgh, \text{ fjær: } \frac{1}{2}kx^2) \quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$$

$$\text{Konservativ kraft: } \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r}) \quad \text{f.eks. } F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_p(x, y, z) \quad \text{Hookes lov (fjær): } F_x = -kx$$

$$\text{Tørr friksjon: } |F_f| \leq \mu_s F_\perp \text{ eller } |F_f| = \mu_k F_\perp \quad \text{Våt friksjon: } \vec{F}_f = -k_f \vec{v} \text{ eller } \vec{F}_f = -bv^2 \hat{v}$$

$$\text{Kraftmoment (dreiemoment): } \vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}, \text{ med } \vec{r}_0 \text{ som valgt referansepunkt} \quad \text{Arbeid: } dW = \tau d\theta$$

$$\text{Betingelser for statisk likevekt: } \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Sigma \vec{\tau}_i = \vec{0}, \text{ uansett valg av referansepunkt } \vec{r}_0 \text{ i } \vec{\tau}_i$$

$$\text{Massesenter (tyngdepunkt): } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad M = \sum m_i$$

$$\text{Kraftimpuls: } \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt = m\Delta \vec{v} \quad \text{Alle støt: } \Sigma \vec{p}_i = \text{konstant} \quad \text{Elastisk støt: } \Sigma E_i = \text{konstant}$$

$$\text{Vinkelhastighet: } \vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}} \quad |\vec{\omega}| = \omega = \dot{\phi} \quad \text{Vinkelakselerasjon: } \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt \quad \alpha = d\omega/dt = \ddot{\phi}$$

$$\text{Sirkelbev.: } v = r\omega \quad \text{Sentripetalaks.: } \vec{a} = -v\omega \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2 \hat{\mathbf{r}} \quad \text{Baneaks.: } a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\text{Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad \text{stive legemer: } \vec{L} = I \vec{\omega} \quad \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{Rotasjonsenergi: } E_{k, \text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$$\text{der treghetsmoment } I \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm \quad \text{med } r = \text{avstanden fra } m_i \text{ (dm) til rotasjonsaksen.}$$

Med aksene gjennom massemidelpunktet: $I \rightarrow I_0$, og da gjelder:

$$\text{kule: } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \quad \text{sylder/skive: } I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{Åpen sylinder/ring: } I_0 = MR^2$$

$$\text{lang, tynn stav: } I_0 = \frac{1}{12} M\ell^2 \quad \text{Parallellaksesteoremet (Steiners sats): } I = I_0 + Mb^2$$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{r}$,
og tyngdepunksbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = d\vec{R}/dt)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0 \vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\vec{\tau}_{\text{tot}} = d\vec{L}_{\text{tot}}/dt$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, der $\sin \theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta)$ med $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+ e^{-\alpha^{(+)} t} + A^- e^{-\alpha^{(-)} t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \text{der} \quad x_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

“Rakettlikningen”: $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_Y + \beta \vec{u}_{\text{ex}}$ der $\beta = \frac{dm}{dt}$ og $\vec{u}_{\text{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse