NTNU
Det skapande universitetet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgåve i TFY4108 Fysikk

Fagleg kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad
Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 18. desember 2013
Eksamenstid (frå-til): 9-13
Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C

Godkjend bestemt enkel kalkulator med tomt minne
K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgåver)

Annan informasjon:

Prosenttalet som står i parentes etter kvart oppgåvenummer indikerer kor mykje oppgåva i utgangspunktet blir vektlagt i vurderinga. I mange tilfelle er det fullt mogeleg å løyse etterfølgjande punkt i ei oppgåve sjølv om eit punkt framfor skulle vere ubesvart.

Oppgåve 1 er om kvantemekanikk. Formellista for denne oppgåva følgjer rett etter oppgåveteksten. Oppgåve 2-4 er om klassisk mekanikk. Formellista for denne delen av eksamen er i eit vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Målform/språk: Nynorsk
Antal sider (inkludert framside og vedlegg): 6

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1 (tel 25 %)

Ein partikkel med masse m er i ein uendeleg djup potensialbrønn med lengde L. Anta at tilstanden til partikkelen er gitt av bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t) \tag{1}$$

der $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$ er bølgjefunksjonen for ein stasjonær tilstand med kvantetal n ($n = 1, 2, \ldots$), med

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L} & \text{for } 0 \le x \le L, \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L, \end{cases} \tag{2}$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}. \tag{3}$$

Settet av funksjonar $\psi_n(x)$ er ortonormalt, dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_m^*(x)\psi_n(x) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{dersom } m = n \\ 0 & \text{dersom } m \neq n. \end{cases} \tag{4}$$

a) Vis at bølgjefunksjonen $\Psi(x,t)$ er normert.

b) Kva er sannsynet for at ei måling av partikkelen sin energi skal gi verdien E_n ($n = 1, 2, \ldots$)?

c) Bestem $\langle E \rangle$.

d) Vis at $\langle x \rangle = L/2 - A\cos\omega t$, dvs. $\langle x \rangle$ oscillerer harmonisk med tida omkring midtpunktet $L/2$ i brønnen. Kva blir amplituden A og vinkelfrekvensen ω? (I utrekninga kan du anta som kjent at for ein vilkårleg stasjonær tilstand er $\langle x \rangle = L/2$.)

e) Bestem $\langle p \rangle$.

Oppgitte resultat for oppgåve 1 som *kan* vere nyttige (lista held fram på neste side):

Operatorar for observablar:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengd	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x,p)$	$\hat{F} = F(\hat{x},\hat{p})$

Tidsavhengig Schrödingerlikning (TASL): $\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerlikning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

Løysing av TASL: $\Psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}$ der $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\Psi(x,0)$.

Normeringskrav: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = 1$, $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

Forventningsverdi, frå sannsynsfordelinga:

$\langle g(F) \rangle = \sum_F g(F) P(F)$ (diskret), $\langle g(F) \rangle = \int dF \, g(F) P(F)$ (kontinuerlig).

Forventningsverdi, frå bølgjefunksjonen: $\langle g(F) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x,t) \, g(\hat{F}) \, \Psi(x,t)$.

Ehrenfests teorem: $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m}$, $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{dU}{dx} \right\rangle$.

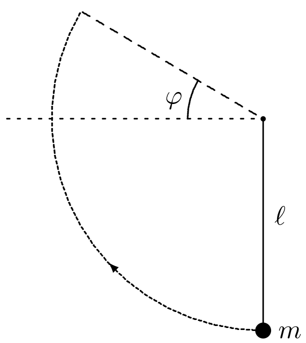
Eigenverdilikning: $\hat{F} \Theta_\alpha(x) = f_\alpha \Theta_\alpha(x)$.

Sannsyn(stettleik) for at ei måling av observabelen F gir verdien f_α: $\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Theta_\alpha^*(x) \Psi(x,t) \right|^2$.

Eit integral: $\int_0^\pi dy \, y \sin y \sin 2y = -\frac{8}{9}$.

Oppgåve 2 (tel 20 %)

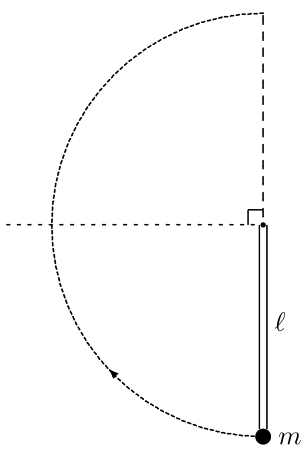
Denne oppgåva involverer ei kule med masse m. Du kan neglisjere kula si utstrekning, dvs. modellér kula som ein punktpartikkel.



Vi heng kula i ei masselaus snor med lengde ℓ som er festa i eit opphengingspunkt. Når kula heng rett ned får den eit slag mot venstre slik at den byrjar å bevege seg i ei sirkelbane. Anta at kula svingar forbi horisontallinja gjennom opphengingspunktet og at ved ein viss vinkel φ (sjå figuren) blir snorkrafta null (dette impliserer at kula deretter ikkje følgjer ei sirkelbane, noko som imidlertid *ikkje* er av betydning for å løyse oppgåva).

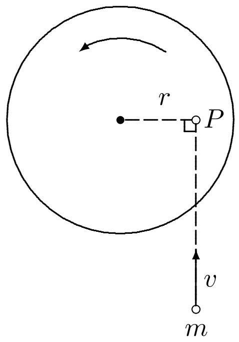
a) Vis at ved vinkelen φ der snorkrafta blir null, er farten til kula gitt som $v = \sqrt{g\ell \sin\varphi}$.

b) Bestem korleis vinkelen φ avheng av den kinetiske energien K_0 kula fekk i slaget. [Det er godt nok at du finn eit uttrykk som involverer $\sin\varphi$, ikkje φ sjølv.] Kor stor må K_0 vere for at kula skal såvidt nå punktet i sirkelbana som er vertikalt over opphengingspunktet (som svarar til $\varphi \to 90°$)?



c) Anta no at svingeeksperimentet blir gjenteke, men med snora bytt ut med ein tynn stav av same lengde. Vi antar at staven er lett nok i forhold til kula til at staven sin masse kan neglisjerast. Kula og staven svingar altså som ein stiv lekam med ein masse lik kulemassen. Kor stor må den kinetiske energien K_0 i botnen av bana no vere for at svingebevegelsen skal såvidt nå sirkelbana sitt toppunkt (dvs. $\varphi \to 90°$)? Samanlikn svaret med verdien av K_0 funnen i **b)** og kommentér skilnaden.

Oppgåve 3 (tel 20 %)

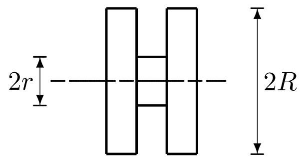


a) På ein leikeplass er det ein enkel "karusell" med tregleiksmoment I_0 om rotasjonsaksen. Karusellen roterer med vinkelhastigheit ω_0 mot klokka. Så kjem eit barn med masse m springande med hastigheit v, hoppar og landar i punktet P på karusellen i ein avstand r frå sentrum (sjå figuren, sett ovanfrå). Barnet roterer deretter saman med karusellen. Kva blir den felles vinkelhastigheiten ω til karusell + barn? (Sjå på barnet som ein punktpartikkel.)

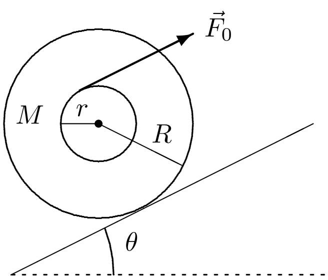
b) Karusellen sitt massesenter er på rotasjonsaksen. Kva blir endringa $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{etter}} - \vec{p}_{\text{før}}$ i bevegelsesmengda til systemet (karusell + barn)? Her refererer 'før' og 'etter' til tidspunktet hhv. like før og like etter landinga. Kva blir retninga på den ytre krafta som verkar på karusellen ved aksen under landinga?

Oppgåve 4 (tel 35 %)

Ein jojo har masse M og ytre radius R, mens senterpinnen, med neglisjerbar masse, har radius r (sjå figur til høgre). Tregleiksmomentet om rotasjonsaksen gjennom massesenteret er difor, i rimeleg tilnærming, $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.



Jojoen blir plassert på eit skråplan med helningsvinkel θ (sjå figur til høgre). Snorkrafta F_0 verkar oppover, parallelt med skråplanet, og har ein storleik som gjer at jojoen er i ro.



a) Skriv ned likevektsvilkåra som må være oppfylte for at jojoen skal halde seg i ro. Bruk vilkåra til å bestemme storleiken på krafta F_0 og storleik og retning på friksjonskrafta f_0.

b) Kor stor må den statiske friksjonskoeffisienten μ_s mellom jojo og underlag vere for at likevekta skal vere mogeleg ved den gitte helningsvinkelen θ?

c) Snorkrafta (med same retning som før) blir no auka til F ($> F_0$), slik at jojoen akselererer oppover skråplanet. Anta rein rulling. Bestem akselerasjonen a til massesenteret og friksjonskrafta f. Vis frå uttrykket for f at friksjonskrafta si retning kan endre seg med F dersom r/R er mindre enn ein bestemt verdi.

I resten av oppgåva antar vi at underlaget er flatt, dvs. $\theta = 0$, og at vi framleis har rein rulling. Det vert oppgitt at då er akselerasjonen til massesenteret pga. snorkrafta F (som har retning parallelt med underlaget) lik

$$a = \frac{2F(1 + r/R)}{3M}. \tag{5}$$

d) Anta at jojoen starta frå ro ved tida $t = 0$. Finn eit uttrykk for jojoen sin kinetiske energi K ved ei tid $t > 0$.

e) Finn avstanden s massesenteret har forflytta seg og vinkelen θ jojoen har rotert ved tida t. Vis at ein kan skrive den kinetiske energien som $K = Fs + rF\theta$ og gi ei tolking av kvart av dei to ledda på høgre side.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ $c = 2,9997 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å= 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ der $\vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ $\vec{F} = m\vec{a}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant $\vec{\alpha}$: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,(\theta - \theta_0)$

Newtons gravitasjonslov: $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $E_\mathrm{p}(r) = -G\frac{M}{r}m$ $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Arbeid: $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ Kinetisk energi: $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$

$E_\mathrm{p}(\vec{r})$ = potensiell energi (tyngde: mgh, fjær: $\frac{1}{2}kx^2$) $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_\mathrm{p}(\vec{r})$ + friksjonsarbeid = konstant

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$ f.eks. $F_x = -\frac{\partial}{\partial x}E_\mathrm{p}(x, y, z)$ Hookes lov (fjær): $F_x = -kx$

Tørr friksjon: $|F_\mathrm{f}| \leq \mu_\mathrm{s}\,F_\perp$ eller $|F_\mathrm{f}| = \mu_\mathrm{k}\,F_\perp$ Våt friksjon: $\vec{F}_\mathrm{f} = -k_\mathrm{f}\vec{v}$ eller $\vec{F}_\mathrm{f} = -bv^2\hat{v}$

Kraftmoment (dreiemoment): $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$, med $\vec{r}_0$ som valgt referansepunkt Arbeid: $\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta$

Betingelser for statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$ $\Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$, uansett valg av referansepunkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}_i$

Massesenter (tyngdepunkt): $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i \to \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$ $M = \sum m_i$

Kraftimpuls: $\int_{\Delta t} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = m\Delta\vec{v}$ Alle støt: $\sum \vec{p}_i$ = konstant Elastisk støt: $\sum E_i$ = konstant

Vinkelhastighet: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{k}}$ $|\,\vec{\omega}\,| = \omega = \dot{\phi}$ Vinkelakselerasjon: $\vec{\alpha} = \mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t$ $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \ddot{\phi}$

Sirkelbev.: $v = r\omega$ Sentripetalaks.: $\vec{a} = -v\omega\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}$ Baneaks.: $a_\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha$

Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$, stive legemer: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ $\vec{\tau} = I\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

Rotasjonsenergi: $E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$,
der treghetsmoment $I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{d}m$ med r = avstanden fra m_i ($\mathrm{d}m$) til rotasjonsaksen.

Med aksen gjennom massemiddelpunktet: $I \to I_0$, og da gjelder:
kule: $I_0 = \frac{2}{5}\,MR^2$ kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}\,MR^2$ sylinder/skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Åpen sylinder/ring: $I_0 = MR^2$
lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12}\,M\ell^2$ Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{\tau}$, og tyngdepunktsbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0\,\vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\vec{\tau}_{\text{tot}} = \mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, der $\sin\theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_{\mathrm{d}} t - \delta)$ med $\omega_{\mathrm{d}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+\mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^-\mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$x(t) = x_0\cos(\omega t - \delta)$, der $x_0(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ $\tan\delta = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

"Rakettlikningen": $m(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{Y}} + \beta\vec{u}_{\mathrm{ex}}$ der $\beta = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ og $\vec{u}_{\mathrm{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse