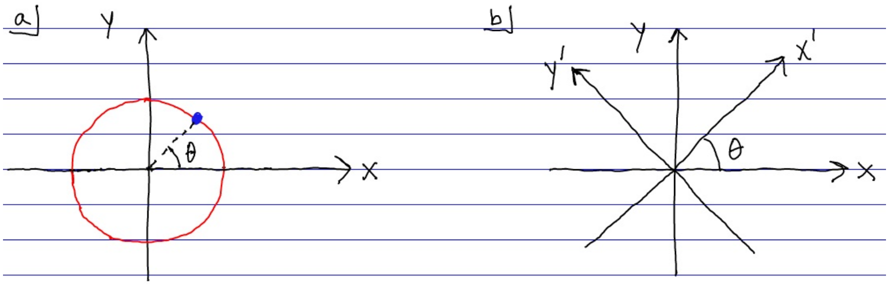
Sirkelbevegelse

Vi kallar det sirkelbevegelse når ein partikkel/lekam bevegar seg på ein sirkel. Ved å velje origo i sentrum av sirkelen kan vilkåret for sirkelbevegelse skrivast

$$|\vec{r}(t)| = \text{konstant} \tag{1}$$

der konstanten tek verdien r, radien i sirkelen.



La oss definere xy-planet som sirkelplanet, med origo i sentrum av sirkelen. Partikkelen sin posisjon kan då spesifiserast vha. vinkelen $\theta(t)$ mht. x-aksen (sjå Figur a). (Merk at partikkelen vil bevege seg på sirkelen uansett tidsavhengigheita til θ.) Dette gir

$$x(t) = r\cos\theta(t), \tag{2}$$
$$y(t) = r\sin\theta(t). \tag{3}$$

Tidsderivasjon gir hastigheitskomponentane i x- og y-retning,

$$v_x = \dot{x} = -r\dot{\theta}\,\sin\theta \quad (= -\dot{\theta}y), \tag{4}$$
$$v_y = \dot{y} = r\dot{\theta}\,\cos\theta \quad (= \dot{\theta}x). \tag{5}$$

Dette gir

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

slik at farten $v = |\vec{v}|$ blir

$$v = r|\dot{\theta}| = r\omega, \tag{7}$$

der

$$\omega \equiv |\dot{\theta}| \tag{8}$$

kallast vinkelhastigheiten (eller vinkelfrekvensen). Vidare finn vi akselerasjonskomponentane i x- og y-retning ved å derivere éin gong til mhp. tida:

$$a_x = \ddot{x} = -r(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \quad (= -\ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2 x), \tag{9}$$
$$a_y = \ddot{y} = r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \quad (= \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 y). \tag{10}$$

Men for sirkelbevegelse er komponentane av akselerasjonsvektoren normalt (vinkelrett) på og tangensielt til sirkelbana nyttigare. Vi kan finne desse ved å transformere til eit nytt kartesisk koordinatsystem med same origo som det opprinnelege, men som har aksar x' og y' som er roterte ein vinkel θ i forhold til x- og y-aksen (sjå Figur b). Samanhengen mellom posisjonskomponentane (x, y) og (x', y') i dei to koordinatsystema er

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \tag{11}$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{12}$$

Den same samanhengen gjeld også for komponentane av vilkårlege vektorar, også akselerasjonsvektoren. Dermed får vi

$$a'_x = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta, \tag{13}$$
$$a'_y = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta. \tag{14}$$

Dette er nesten dei komponentane vi er ute etter, men ikkje heilt. Vi veit frå definisjonen av akselerasjonsvektoren at den vil peike mot den konkave sida ("innsida") av sirkelbana, så normalkomponenten a'_x vil vere negativ. Det er difor meir hensiktsmessig å definere normalkomponenten som $a_{\rm rad} \equiv -a'_x$ som vil vere positiv. Dette er altså komponenten av akselerasjonsvektoren radielt inn mot sirkelsenteret. Vidare er det hensiktsmessig at tangensialkomponenten av akselerasjonen reknast som positiv når den peikar i same retning som hastigheiten $\vec{v}$. Sidan y'-aksen har same retning som $\vec{v}$ når $\dot\theta > 0$ og motsett retning når $\dot\theta < 0$, definerer vi tangensialkomponenten som $a_{\rm tan} \equiv a'_y \,{\rm sgn}(\dot\theta)$, der ${\rm sgn}(\dot\theta)$ betyr forteiknet til $\dot\theta$. Dette gir

$$
\begin{aligned}
a_{\rm rad} &= -(a_x \cos\theta + a_y \sin\theta), && (15)\\
a_{\rm tan} &= (-a_x \sin\theta + a_y \cos\theta)\,{\rm sgn}(\dot\theta). && (16)
\end{aligned}
$$

Vha. (13)-(14) får vi då

$$
\begin{aligned}
a_{\rm rad} &= -(a_x \cos\theta + a_y \sin\theta) = r[(\ddot\theta \sin\theta + \dot\theta^2 \cos\theta)\cos\theta - (\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta)\sin\theta] \\
&= r\dot\theta^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r\dot\theta^2 = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(der vi brukte (7))}, && (17)\\
a_{\rm tan} &= (-a_x \sin\theta + a_y\cos\theta)\,{\rm sgn}(\dot\theta) = r[(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\sin\theta + (\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta)\cos\theta]\,{\rm sgn}(\dot\theta) \\
&= r\ddot\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,{\rm sgn}(\dot\theta) = r\ddot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta) = \frac{dv}{dt}. && (18)
\end{aligned}
$$

Den siste overgangen krev ein forklaring. Sidan $|\dot\theta| = \dot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta)$ gir (7) at $v = r\dot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta)$. Dermed blir[1]

$$
\frac{dv}{dt} = r\frac{d}{dt}[\dot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta)] = r[\ddot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta) + \dot\theta\frac{d}{dt}{\rm sgn}(\dot\theta)]. \qquad (19)
$$

Det kan visast[2] at det andre leddet er 0, så resultatet $dv/dt = r\ddot\theta\,{\rm sgn}(\dot\theta)$ følgjer.

La oss oppsummere. Vi har funne at radial- og tangensialkomponenten av akselerasjonsvektoren er

$$
\begin{aligned}
a_{\rm rad} &= \frac{v^2}{r}, && (20)\\
a_{\rm tan} &= \frac{dv}{dt}. && (21)
\end{aligned}
$$

Desse uttrykka gjeld for ein heilt vilkårleg sirkelbevegelse, dvs. utan begrensingar på tidsavhengigheita til vinkelen θ. Sidan dei to komponentane står vinkelrett på kvarandre følgjer det frå Pythagoras at storleiken av akselerasjonsvektoren er

$$
a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_{\rm rad}^2 + a_{\rm tan}^2}. \qquad (22)
$$

Radialkomponenten $a_{\rm rad}$ blir ofte kalla *sentripetalakselerasjonen*.

Eit viktig spesialtilfelle er **uniform** sirkelbevegelse, som er definert som sirkelbevegelse med $v =$ konstant. I staden for her å bruke v til å angi kor raskt partikkelen bevegar seg i sirkelbana, kan ein alternativt bruke perioden T, som er tida det tek for partikkelen å gå éin gong rundt sirkelen: vi har $vT = 2\pi r$, som gir

$$
T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (23)
$$

Sidan v er konstant, blir $a_{\rm tan} = 0$. Akselerasjonsvektoren $\vec{a}$ peikar då radielt inn mot sentrum og har storleik $a = a_{\rm rad} = v^2/r$. Ved å eliminere v til fordel for T kan sentripetalakselerasjonen for uniform sirkelbevegelse alternativt uttrykkjast som $a_{\rm rad} = 4\pi^2 r/T^2$.

[1] I forelesinga gjorde eg ei litt meir primitiv utrekning som er gyldig når $\dot\theta > 0$ eller $\dot\theta < 0$. Diskusjonen i desse notata tek seg også av tilfellet $\dot\theta = 0$.

[2] For dei som er interesserte (dette er ikkje pensum): Vha. kjerneregelen har vi at $\frac{d}{dt}{\rm sgn}(\dot\theta) = \ddot\theta\frac{d}{d\dot\theta}{\rm sgn}(\dot\theta)$. Vidare er $\frac{d}{dx}{\rm sgn}(x) = 2\delta(x)$, der $\delta(x)$ er Diracs deltafunksjon (som de truleg kjenner frå Fourieranalyse i matematikk). Dermed blir det andre leddet i (19) lik $2r\ddot\theta\dot\theta\delta(\dot\theta)$. Men dette leddet forsvinn fordi $x\delta(x) = 0$.