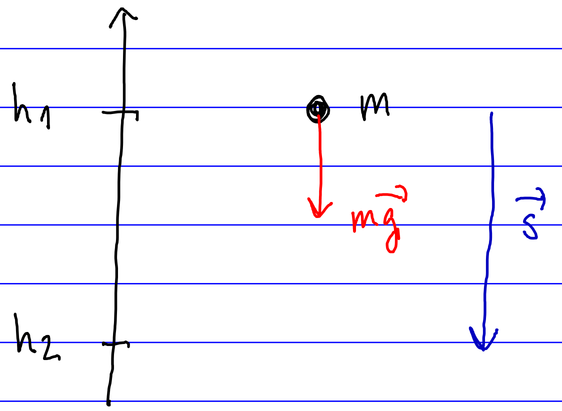
Potensiell energi og energibevaring (YF 7.1–7.2, 14.3)

Potensiell energi (P.E.):
- "lagra" i ein lekam, er ein funksjon av "posisjon"
- assosiert med ei kraft (som er "konservativ"; sjå seinare)
- P.E. har "potensial" til å omformast (heilt eller delvis) til K.E. ved at krafta gjer arbeid på lekamen

Eks. P.E. assosiert med tyngdekrafta



Ein masse m fell frå høgda h_1 til høgda h_2.

Arbeidet tyngdekrafta gjer på lekamen:

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{s} = mg(h_1 - h_2)$$
$$= mgh_1 - mgh_2$$

Definér

$$\boxed{U = mgh}$$

som lekamen sin potensielle energi ved høgda h

$$\Rightarrow W_g = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

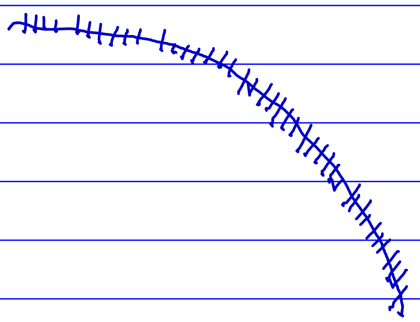
der ΔU er endringa i potensiell energi
(dvs. $\Delta U = U_{etter} - U_{før}$)

Vi antok her vertikal bevegelse nedover. Men resultatet $W_g = -\Delta U$ er korrekt for vilkårlege bevegelsar:

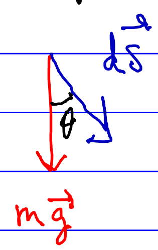
Ned: h_1, $h_2 < h_1$ $\Rightarrow \Delta U < 0$, $\downarrow m\vec{g}$ $\downarrow \vec{s}$ $\Rightarrow W_g > 0$

Opp: $h_2 > h_1$, h_1 $\Rightarrow \Delta U > 0$, $\downarrow$ $\uparrow \vec{s}$ $\Rightarrow W_g < 0$

For ei vilkårleg krum bane kan vi dele opp bana i infinitesimale rettlinja forflytningar $d\vec{s}$:



Sjå på ein forflytning $d\vec{s}$:



$$dW_g = m\vec{g}\cdot d\vec{s} = mg\,\overbrace{ds\cos\theta}^{-dh}$$
$$= -mg\,dh = -dU$$

$$\Rightarrow W_g = -\Delta U$$

Anta at kun tyngdekrafta gjer arbeid på lekamen (dersom andre krefter også verkar på lekamen, antar vi at dei ikkje gjer noko arbeid)

dvs. $W_{tot} = W_g$

Bruker no $W_{tot} = \Delta K$ og $W_g = -\Delta U$

$\Rightarrow$ $\Delta K = -\Delta U$ $\Rightarrow$ $\Delta(K+U) = 0$

M.a.o. endringa i $K+U$ er null, dvs. $K+U$ er <u>bevart</u>.

Vi kallar $K+U$ den mekaniske energien til lekamen.

Vi har altså vist at dersom kun tyngden gjer arbeid er mekanisk energi bevart.

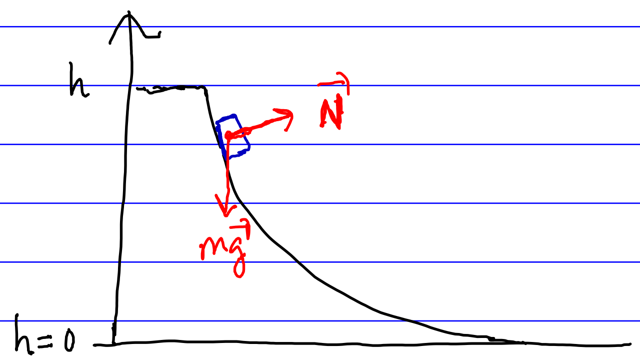
Ved å bruke $\Delta K = K_2 - K_1$, $\Delta U = U_2 - U_1$ kan bevaringslova også skrivast

$$\boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2} \qquad (*)$$

Merk:

Kun <u>differansar</u> ΔU i potensiell energi er viktige. Sidan $\Delta U = U_2 - U_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\,\Delta h$ er difor kun høgde differansar viktige. Vi kan difor velje "nullpunkt" $h=0$ (dvs. $U=0$) der det måtte passe oss.

<u>Eks</u>: Sklie utan friksjon



Normalkrafta står normalt på forflytninga langs heile bana (dvs. $\vec{N} \perp d\vec{s}$)

$\Rightarrow$ normalkrafta gjer ikkje arbeid

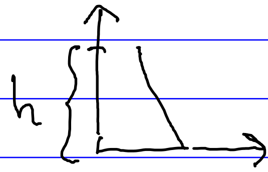
$\Rightarrow$ kun tyngden gjer arbeid
$\Rightarrow$ mekanisk energi $K+U$ bevart

Slepp massen frå høgda h med null fart. Kva er farten v i botnen av bana?

Toppen av bana: $\quad v=0 \Rightarrow K+U = 0 + mgh = mgh$
Botnen av bana: $\quad K+U = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

Merk: ei sklie med ei anna form vil gi same v dersom høgde-forskjellen h er den same



Dersom friksjon hadde vore til stades ville ikkje $K+U$ ha vore bevart fordi i tillegg til tyngdekrafta ville då også friksjonskrafta ha gjort arbeid.

La oss difor sjå meir generelt på tilfellet at også andre krefter enn tyngda (f. eks. friksjonskrefter) gjer arbeid. La oss kalle dette arbeidet W_a ("a" for "andre"). Då har vi

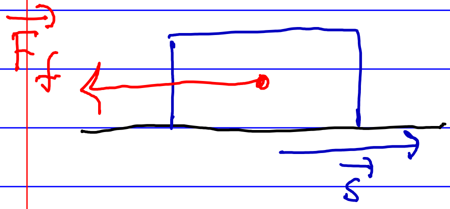
$$\Delta K = W_{tot} = W_g + W_a = -\Delta U + W_a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta(K+U) = W_a}$$

Altså: Endringa i mekanisk energi (kinetisk + potensiell) er lik arbeidet gjort av andre krefter

(sjekk: dersom $W_a = 0$ blir $\Delta(K+U) = 0$, ok)

Arbeid av friksjonskrefter: $W_f = \vec{F}_f \cdot \vec{s} < 0$



W_f <u>negativ</u> sidan $\vec{F}_f$ og $\vec{s}$ motsett retn.

Dersom $W_a = W_f \Rightarrow \Delta(K+U) < 0$
dvs. mekanisk energi <u>minkar</u>

Friksjonsarbeidet gir <u>auka</u> <u>indre</u> energi U_{indre}
(varmeutvikling $\Leftrightarrow$ auka K.E. til molekyl i kloss/underlag.)

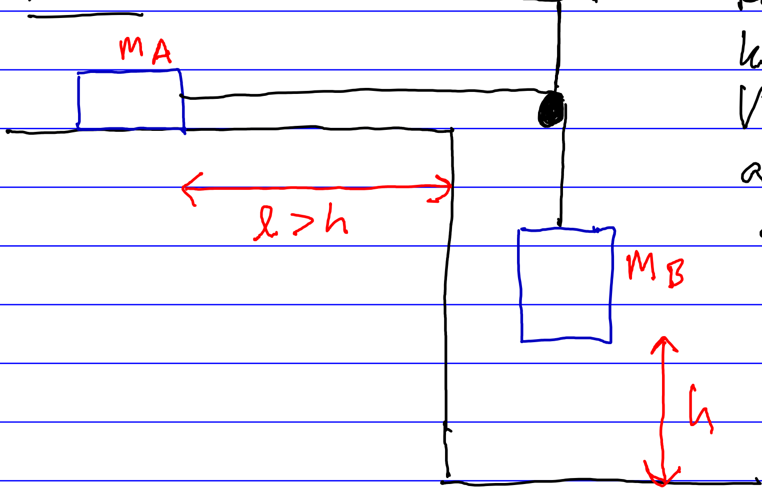
ɔ: $\Delta U_{indre} = -W_f > 0$

$$\Rightarrow \Delta(K+U) = W_f = -\Delta U_{indre}$$

$$\Rightarrow \Delta \underbrace{\left(K + U + U_{indre}\right)}_{\equiv \text{ total energi}} = 0$$

Så den <u>totale</u> energien (mekanisk + indre energi)
er <u>bevart</u>

<u>Eks:</u>



Kinetisk friksjonskoeff. mellom kloss A og underlag er μ_k. Vi slepp systemet frå ro og antar at m_B er stor nok til at m_A byrjar å skli.

Kva er farten v når kloss B treff golvet?

$$\Delta(K+U) = W_f$$

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(m_A+m_B)v^2 - 0\right)}_{\Delta K} + \underbrace{\left(0 - m_B g h\right)}_{\Delta U} = -\underbrace{\mu_k m_A g}_{\substack{\text{kinetisk} \\ \text{friksjonskraft} \\ \mu_k N \ (N=m_A g)}} \cdot \overset{\text{forflytning av } m_A}{h}$$

(merk at m_A endrar ikkje høgde og bidreg difor ikkje til ΔU)

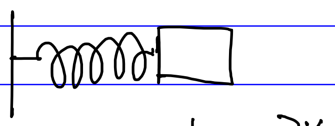
$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gh\,(m_B - \mu_k m_A)}{m_A + m_B}}$$

(ser at bevegelse ($v>0$) krev $m_B > \mu_k m_A$)

Ein annan type potensiell energi er <u>elastisk potensiell energi.</u>

Eks.: Skyting med sprettert
- vi tilfører P.E. ved å strekkje gummibandet
- når vi slepp, blir steinen sett i bevegelse: omforming av P.E. til K.E.

Eit anna eks.: Blokk festa i fjør



- trykk saman $\Rightarrow$ P.E.
- slepp $\Rightarrow$ P.E. konvertert til K.E.

Fjørkraft: $F = -kx$

$\therefore \quad \vec{F} = -kx\,\vec{i}$ $\quad$ ($\vec{i}$: einingsvektor i x-retning)

Arbeidet fjørkrafta gjer på blokka når denne forflyttar seg $d\vec{s} = dx\,\vec{i}$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -kx \, \vec{i} \cdot dx \, \vec{i}$$
$$= -kx \, dx \qquad (\text{fordi } \vec{i} \cdot \vec{i} = 1)$$

$\Rightarrow$ arbeid når blokka flyttar seg frå $x = x_1$ til $x = x_2$:

$$W = \int_1^2 dW = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) \, dx = -\left(\tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2\right)$$

Definér $\boxed{U = \tfrac{1}{2}kx^2}$ Blokka sin potensielle energi ved utsving x frå likevekt

$$\Rightarrow \quad W_{\text{fjørkraft}} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

(Merk at dette er same relasjon mellom W og ΔU som vi fann for tyngdekrafta tidlegare.)

Dersom vi kan neglisjere andre krefter enn fjørkrafta (f.eks. friksjonskraft $-bv$) har vi

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{fjørkraft}} = -(U_2 - U_1)$$

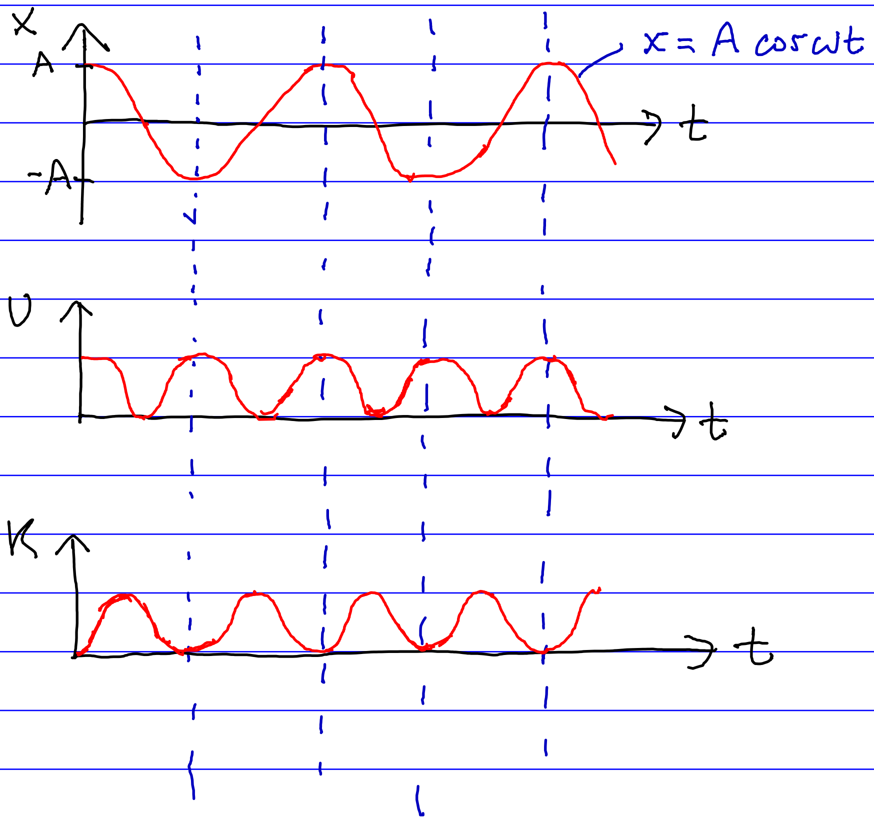
$$W_{\text{tot}} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\text{ɔ:} \quad \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2$$

dvs. mekanisk energi $K + U$ er bevart

Eks: Vi slepp massen frå $x = A$ med $v = 0$



$(U = \frac{1}{2}kx^2)$

$(K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2)$

når $x = 0$ er $|v|$ max, når $v = 0$ er $|x|$ max

K er max når U er min, og omvendt

$K + U = \text{konstant} = K_{max} = U_{max}$

Som tidlegare: Dersom andre krefter også gjer arbeid (W_a) blir i staden

$$\Delta(K + U) = W_a$$

Konservative og ikkje-konservative krefter (YF 7.3)

Tyngdekraft og fjørkrefter er døme på <u>konservative krefter</u>. Friksjonskrefter er <u>ikkje-konservative</u>.

Ei konservativ kraft er kjenneteikna ved følgjande eigenskapar ved arbeidet W som krafta utfører:

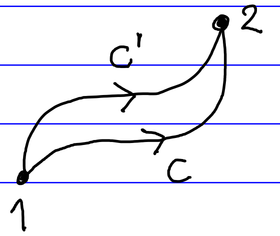
(1) Kan uttrykkjast som $W = -\Delta U$

der U er potensiell energi

(2) Arbeidet er <u>reversibelt</u>:

$$\int_1^2 dW = -\int_2^1 dW$$

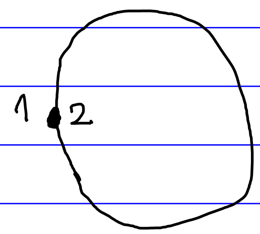
(3) Arbeidet er uavhengig av vegen og avheng kun av start- og sluttpunkt:



$\Leftarrow$ arbeidet er det same for dei to vegane C og C' som har same start- og sluttpunkt:

$$\int_C dW = \int_{C'} dW$$

(4) Når start- og sluttpunkt er identiske er arbeidet null.



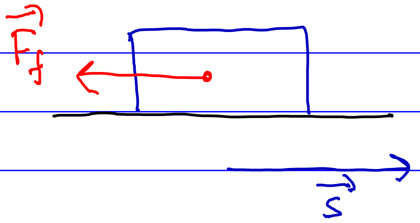
(følgjer ved å kombinere (2) og (3))

Når alle krefter som gjer arbeid er konservative er mekanisk energi bevart, dvs.

$$K + U = \text{konstant}$$ (her er U den potensielle energien assosiert med alle konservative krefter)

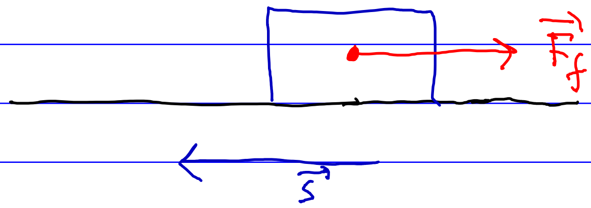
Friksjonskrefter er <u>ikkje</u> konservative:

Friksjonsarbeid er ikkje reversibelt (dvs. eigenskap (2) ikkje oppfylt)



$$\Rightarrow \quad W_f = \vec{F}_f \cdot \vec{s} < 0$$

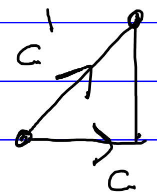
Dersom vi reverserer forflytninga skiftar også friksjons-krafta retning slik at W_f er igjen negativt:



$$\Rightarrow \quad W_f = \vec{F}_f \cdot \vec{s} < 0$$

(For ei konservativ kraft ville arbeidet ha vore $-W$ for den reverserte forflytninga dersom det var W for den opprinnelege forflytninga)

Friksjonsarbeid er heller ikkje uavhengig av vegen, dvs. eigenskap (3) ikkje oppfylt



$W_{f,c}$
$> W_{f,c}$

Friksjonsarbeid tilfredsstiller heller ikkje eigenskapane (1) og (4).

Konservative krefter og potensiell energi (YF 7.4)

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dersom } \vec{F} \\ \text{er konservativ}}}{=} -dU$$

der $U = U(x,y,z)$ er ein potensiell-energi-funksjon

$$\Rightarrow: \quad dU = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

På vektorform: $\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$ (*)

der $\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ("nabla-operatoren")

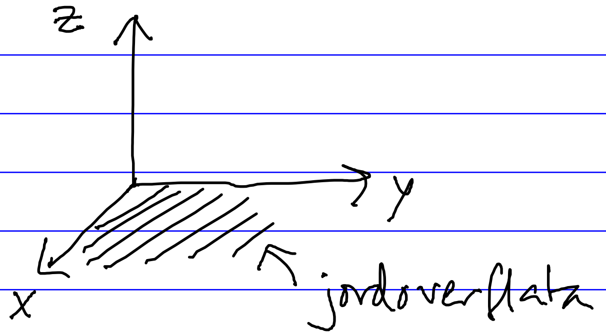
Merk minusteiknet i (*)!

Eks.: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$

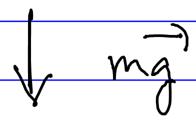
$\Rightarrow$: F_x i pos. x-retn. dersom U minkar når x aukar
F_x i neg. x-retn. dersom U aukar når x aukar

$\Rightarrow$: krafta har alltid ein slik retning at den prøver å <u>redusere potensiell energi</u>.

Eks: Tyngdekrafta



$$U = U(x,y,z) = mgz$$

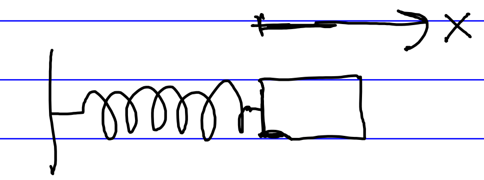


$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= -(0, 0, mg) = \underbrace{-mg\hat{k}}$$

peikar nedover
og er uavhengig av z

Eks: Fjørkraft



$$U = U(x,y,z) = \frac{1}{2}kx^2$$

(x=0 i likevekt)

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -(kx, 0, 0) = -kx\vec{i}$$