

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4108 Fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad

Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 13. august 2014

Eksamenstid (fra-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne

K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver)

Annen informasjon:

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen. I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt i en oppgave selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellisten for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten. Oppgave 2-4 er om klassisk mekanikk. Formellisten for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (inkludert forside og vedlegg): 6

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 (teller 25 %)

Den tidsuavhengige Schrödingerligningen (TUSL) for elektronet i hydrogenatomet kan skrives i sfæriske koordinater som

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] + U(r) \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi).$$

Bruken av sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) er hensiktsmessig fordi den potensielle energien U har sfærisk symmetri, dvs. den avhenger kun av radialkoordinaten r ,

$$U(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

der ϵ_0 er den elektriske permittiviteten i vakuum og q er elementærladningen.

Bølgefunksjonen for elektronet i et bestemt energinivå i hydrogenatomet er gitt som

$$\psi(r, \theta, \phi) = C \left(2 - \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{2a}} \quad (1)$$

der C er en normeringskonstant og a er Bohr-radien,

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq^2}. \quad (2)$$

a) Vis at energien E for dette bestemte energinivået kan skrives som E_1/n^2 der $E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$, og bestem verdien av kvantetallet n .

b) Forklar kort hvordan du ville ha funnet normeringskonstanten C (du skal ikke gjøre en eksplisitt utregning av C).

c) Gi en tolkning av uttrykket $|\psi(r, \theta, \phi)|^2 dV$, der $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ er volumet til et infinitesimalt volumelement omkring punktet med koordinater (r, θ, ϕ) . Med dette som utgangspunkt, finn et uttrykk for sannsynlighetstettheten $P(r)$ i sannsynligheten $P(r)dr$ for å finne elektronet i et kuleskall med radius r og bredde dr , i det bestemte energinivået.

d) Finn et uttrykk for sannsynligheten for å finne elektronet innenfor Bohr-radien a . Kommentér kort den numeriske verdien av sannsynligheten. Det blir oppgitt at $C = 1/\sqrt{32\pi a^3}$.

Oppgitte resultater for oppgave 1 som kan være nyttige (listen fortsetter på neste side):

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{\vec{r}} = \vec{r}$
Bevegelsesmengde	$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r})$
Generell observabel $F(\vec{r}, \vec{p})$	$\hat{F} = F(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})$

Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$.

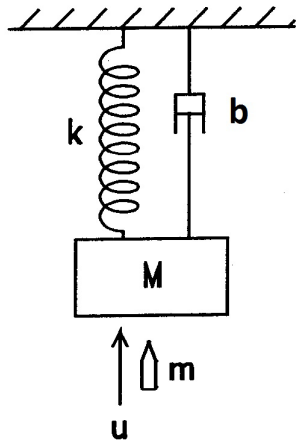
Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$.

Normeringskrav: $\int_V dV |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$.

Noen integraler:

$$\begin{aligned}\int du u^2 e^{-u} &= -e^{-u}(u^2 + 2u + 2) + \text{konstant} \\ \int du u^3 e^{-u} &= -e^{-u}(u^3 + 3u^2 + 6u + 6) + \text{konstant} \\ \int du u^4 e^{-u} &= -e^{-u}(u^4 + 4u^3 + 12u^2 + 24u + 24) + \text{konstant}\end{aligned}$$

Oppgave 2 (teller 15 %)



En blokk med masse M er festet til en fjær med fjærkonstant k . Systemet har dempningskoeffisient b . Blokken henger i ro i posisjonen $x = 0$ (x er blokkens vertikalkoordinat). Et prosjektil med masse m skytes så inn i blokken og blir sittende fast. Prosjektilets hastighet før støtet er u . Situasjonen like før støtet er skissert i figuren til venstre. Du kan neglisjere blokkens forskyvning under støtet.

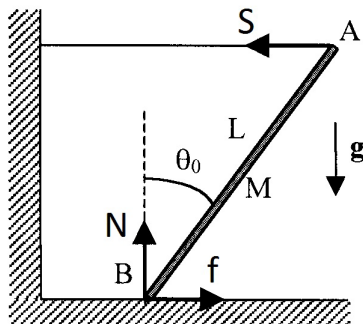
a) Hva blir hastigheten v_0 til felleslegemet (blokk + prosjektil) umiddelbart etter støtet?

b) Som følge av støtet blir felleslegemet satt i svingning. Anta at parametrene numeriske verdier gjør at svingningen er underkritisk dempet, slik at utsvinget x ved en tid t etter støtet er gitt som

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta).$$

Finn konstantene A , γ , ω_d og δ uttrykt ved gitte parametre.

Oppgave 3 (teller 30 %)



Ei rett, tynn stang har masse M og lengde L . Stanga står på et horisontalt underlag og danner vinkelen $\theta_0 = 45^\circ$ med vertikalretningen. Stanga holdes i ro ved hjelp av ei horisontal snor som er festet i enden A, som vist i figuren til venstre. Friksjonskrafta f i den andre enden B er stor nok til å hindre at stanga glir mot underlaget. Tyngdens akselerasjon er g .

a) Bestem snorkrafta S , friksjonskrafta f og normalkrafta N . Finn betingelsen på den statiske friksjonskoeffisienten μ_s for at stanga ikke skal gli mot underlaget.

På et visst tidspunkt kuttes snora, slik at stanga faller (med null start-hastighet), idet den roterer fritt om endepunktet B uten å gli.

b) Bestem stangas vinkelhastighet ω og vinkelakselerasjon α når stanga danner vinkelen θ med vertikalretningen.

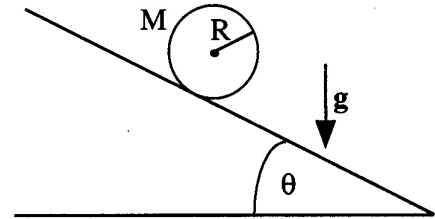
c) Finn f og N umiddelbart etter at snora er kuttet. Bestem om betingelsen på μ_s funnet i pkt. a) er tilstrekkelig for at stanga ikke skal begynne å gli umiddelbart etter at snora er kuttet.

Oppgave 4 (teller 30 %)

En sylinder med masse M og radius R plasseres på et skråplan som danner en vinkel θ med horisontalretningen (se figur). Sylinderens treghetsmoment om rotasjonsaksen er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Tyngdens akselerasjon er g .

Sylindren slippes med null starthastighet og begynner å rulle uten å gli (dvs. ren rulling) nedover skråplanet.

- a) Sett opp ligningene som beskriver bevegelsen til sylindren, og finn akselerasjonen a til sylinderens massesenter langs skråplanet. Hvor stor er friksjonskraften i denne situasjonen?



Vi ser så på en annen situasjon: Sylindren startes ved tiden $t = 0$ med hastighet $v(t = 0) = 0$ for massesenteret og med vinkelhastighet $\omega(t = 0) = \omega_0$. Rotasjonsretningen er *mot* klokka. Friksjonskoeffisienten mellom skråplanet og underlaget er μ .

- b) Finn betingelsen for at akselerasjonen av massesenteret blir oppover langs skråplanet.
- c) Finn hastigheten v til massesenteret ved det tidspunktet bevegelsen oppover skråplanet blir en ren rullebevegelse.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad c = 2,9997 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å = 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{der} \quad \vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \vec{\alpha}: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Newtons gravitasjonslov: } \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad E_p(r) = -G \frac{M}{r} m \quad G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\text{Arbeid: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{Kinetisk energi: } E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p(\vec{r}) = \text{potensiell energi (tyngde: } mgh, \text{ fjær: } \frac{1}{2}kx^2) \quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$$

$$\text{Konservativ kraft: } \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r}) \quad \text{f.eks. } F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_p(x, y, z) \quad \text{Hookes lov (fjær): } F_x = -kx$$

$$\text{Tørr friksjon: } |F_f| \leq \mu_s F_\perp \text{ eller } |F_f| = \mu_k F_\perp \quad \text{Våt friksjon: } \vec{F}_f = -k_f \vec{v} \text{ eller } \vec{F}_f = -bv^2 \hat{v}$$

$$\text{Kraftmoment (dreiemoment): } \vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}, \text{ med } \vec{r}_0 \text{ som valgt referansepunkt} \quad \text{Arbeid: } dW = \tau d\theta$$

$$\text{Betingelser for statisk likevekt: } \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Sigma \vec{\tau}_i = \vec{0}, \text{ uansett valg av referansepunkt } \vec{r}_0 \text{ i } \vec{\tau}_i$$

$$\text{Massesenter (tyngdepunkt): } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad M = \sum m_i$$

$$\text{Kraftimpuls: } \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt = m\Delta \vec{v} \quad \text{Alle støt: } \Sigma \vec{p}_i = \text{konstant} \quad \text{Elastisk støt: } \Sigma E_i = \text{konstant}$$

$$\text{Vinkelhastighet: } \vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}} \quad |\vec{\omega}| = \omega = \dot{\phi} \quad \text{Vinkelakselerasjon: } \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt \quad \alpha = d\omega/dt = \ddot{\phi}$$

$$\text{Sirkelbev.: } v = r\omega \quad \text{Sentripetalaks.: } \vec{a} = -v\omega \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2 \hat{\mathbf{r}} \quad \text{Baneaks.: } a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\text{Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad \text{stive legemer: } \vec{L} = I \vec{\omega} \quad \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{Rotasjonsenergi: } E_{k, \text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$$\text{der treghetsmoment } I \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm \quad \text{med } r = \text{avstanden fra } m_i \text{ (dm) til rotasjonsaksen.}$$

Med aksene gjennom massemidtpunktet: $I \rightarrow I_0$, og da gjelder:

$$\text{kule: } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \quad \text{sylder/skive: } I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{Åpen sylinder/ring: } I_0 = MR^2$$

$$\text{lang, tynn stav: } I_0 = \frac{1}{12} M\ell^2 \quad \text{Parallellaksesteoremet (Steiners sats): } I = I_0 + Mb^2$$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{r}$,
og tyngdepunksbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = d\vec{R}/dt)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0 \vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\vec{\tau}_{\text{tot}} = d\vec{L}_{\text{tot}}/dt$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, der $\sin \theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta)$ med $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+ e^{-\alpha^{(+)} t} + A^- e^{-\alpha^{(-)} t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \text{der} \quad x_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

“Rakettlikningen”: $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_Y + \beta \vec{u}_{\text{ex}}$ der $\beta = \frac{dm}{dt}$ og $\vec{u}_{\text{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse