TFY4108 Fysikk: Løysing kontinuasjonseksamen 13. aug. 2014

Oppgåve 1

(a) Reknar først ut venstresida av TUSL. Sidan bølgjefunksjonen i dette tilfellet er uavhengig av θ og ϕ, forsvinn ledda som involverer deriverte mhp. desse to variablane. Vi har vidare

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial r} &= C\frac{\partial}{\partial r}\left(2-\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}} = C\left[-\frac{1}{a}+\left(2-\frac{r}{a}\right)\left(-\frac{1}{2a}\right)\right]e^{-\frac{r}{2a}} = \frac{C}{a}\left(-2+\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}, \quad (1) \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) &= \frac{1}{r^2}\frac{C}{a}\frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^2+\frac{r^3}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}} = \frac{1}{r^2}\frac{C}{a}\left[-4r+\frac{3r^2}{2a}+\left(-2r^2+\frac{r^3}{2a}\right)\left(-\frac{1}{2a}\right)\right]e^{-\frac{r}{2a}} \\ &= \frac{C}{a}\left(-\frac{4}{r}+\frac{5}{2a}-\frac{r}{4a^2}\right)e^{-\frac{r}{2a}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Ved å setje dette inn i TUSL, skrive om den potensielle energien til $U(r) = -\frac{\hbar^2}{mar}$, og forkorte faktoren $Ce^{-\frac{r}{2a}} \neq 0$ som er felles for alle ledd, får vi likninga

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4}{ar}-\frac{5}{2a^2}+\frac{r}{4a^3}\right)-\frac{\hbar^2}{mar}\left(2-\frac{r}{a}\right) = E\left(2-\frac{r}{a}\right). \quad (3)$$

Denne likninga kjem frå TUSL og må difor vere gyldig for *alle verdiar* av radialkoordinaten r. Men det er mogeleg kun dersom likninga er *trivielt* oppfylt, ved at koeffisientane som multipliserer potensane r^ℓ av r er identiske på begge sider av likninga. Samanlikning av koeffisientane gir,

$$\begin{aligned} &\text{for potensen } r^1: && \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{4a^3} = -\frac{E}{a}, && (4) \\ &\text{for potensen } r^0: && \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left(-\frac{5}{2a^2}\right)-\frac{\hbar^2}{ma}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) = 2E, && (5) \\ &\text{for potensen } r^{-1}: && \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{4}{a}-\frac{\hbar^2}{ma}\cdot 2 = 0. && (6) \end{aligned}$$

Ved å løyse enten (4) eller (5) mhp. E får vi

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{E_1}{4} \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad n = 2 \quad (7)$$

der vi valde den positive løysinga for n sidan kvantetalet n for hydrogenatomet er positivt. Ein kommentar: For å finne E er det ikkje naudsynt å finne alle tre likningane (4)-(6); det er nok å finne éin av likningane som involverer E, dvs. enten (4) eller (5). Men på den andre sida kan dei to "overflødige" likningane ha ein viss nytteverdi som ekstra sjekkar på at ein har rekna rett.

(b) Kan finne C frå normeringskravet

$$\int_V dV\,|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 = 1. \quad (8)$$

(Å skrive essensielt det føregåande var nok til å få full score her. Nokre utbroderingar: (i) Sidan C kun inngår via konstanten $|C|^2$ som kan takast utanfor integralet, kan C bestemmast ved å rekne ut integralet.[1] (ii) Sidan den oppgjevne bølgjefunksjonen tilhøyrer eit bestemt energinivå og difor er assosiert med ein stasjonær tilstand, får vi $|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 = |\psi(\boldsymbol{r})|^2$ uavhengig av tida t.)

(c) $|\psi(r,\theta,\phi)|^2\,dV$ er sannsynet for å finne elektronet i det gitte volumelementet. Ved å integrere dette uttrykket over alle θ og ϕ får ein sannsynet $P(r)dr$ for å finne elektronet i eit kuleskal med radius r og

[1] Strengt tatt kan ein kun bestemme $|C|$, men fasen til C er uviktig, så ein vel konvensjonelt C reell og positiv.

breidde dr:

$$\begin{aligned} P(r)dr &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{=\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)=2} \; r^2 dr \, |\psi(r,\theta,\phi)|^2 \\ &= 4\pi r^2 dr \, C^2 \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} \\ \Rightarrow \quad P(r) &= 4\pi C^2 r^2 \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a}. \end{aligned} \tag{9}$$

(d) Sannsynet for å finne elektronet innanfor Bohr-radien a er

$$\int_0^a P(r)\,dr = 4\pi C^2 \int_0^a dr\, r^2 \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} = 4\pi C^2 \int_0^a dr \left[4r^2 - 4\frac{r^3}{a} + \frac{r^4}{a^2}\right] e^{-r/a}. \tag{10}$$

Vi byter integrasjonsvariabel til den dimensjonslause $u = r/a$. Dermed blir $r = au$, så $dr = a\,du$. Vidare blir $u = 0$ (for $r = 0$) og $u = 1$ (for $r = a$) dei nye integrasjonsgrensene. Dette gir, ved også å bruke dei tre oppgjevne integrala i formelsamlinga,

$$\begin{aligned} &\int_0^a P(r)\,dr = 4\pi C^2 a^3 \int_0^1 du \left[4u^2 - 4u^3 + u^4\right] e^{-u} \\ &= \quad -4\pi C^2 a^3 \left[4(u^2+2u+2) - 4(u^3+3u^2+6u+6) + (u^4+4u^3+12u^2+24u+24)\right] e^{-u}\Big|_0^1 \\ &= \quad -4\pi C^2 a^3 \left\{e^{-1}[4(1+2+2) - 4(1+3+6+6) + (1+4+12+24+24)] - e^{-0}[4\cdot 2 - 4\cdot 6 + 24]\right\} \\ &= \quad -4\pi C^2 a^3 \left\{21e^{-1} - 8\right\} = 32\pi a^3 C^2 \left(1 - \frac{21}{8}e^{-1}\right) = 1 - \frac{21}{8}e^{-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

der vi i siste overgang sette inn $C^2 = (32\pi a^3)^{-1}$. Den numeriske verdien av svaret er ca. 0,034. I dette bestemte energinivået er altså sannsynet for å finne elektronet innanfor Bohr-radien ca. 3,4%, ein ganske så liten verdi. Det er difor mykje meir sannsynleg å finne elektronet utanfor Bohr-radien (sannsyn ca. 96,6%).

Oppgåve 2

(a) Vi bruker bevaring av bevegelsesmengd. Bevegelsesmengda før kollisjonen er $mu + M\cdot 0 = mu$, mens bevegelsesmengda etter kollisjonen er $(M+m)v_0$. Bevaring av bevegelsesmengd gir då

$$mu = (M+m)v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{m}{M+m}u. \tag{12}$$

(b) Frå formelsamlinga og det faktum at felleslekamen som svingar har masse $M + m$, finn vi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}, \tag{13}$$

$$\gamma = \frac{b}{2(M+m)}, \tag{14}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{15}$$

For å finne A og δ må vi bruke initialvilkåra

$$x(t=0) = 0, \tag{16}$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0, \tag{17}$$

som uttrykkjer at lekamen startar svinginga frå likevektsposisjonen med starthastigheit v_0. Ved å setje $t = 0$ i uttrykket for utsvinget $x(t)$ og bruke (16) får vi

$$A\cos\delta = 0. \tag{18}$$

Konstanten A kan ikkje vere null, sidan då ville utsvinget ha vore null til alle tider. Dermed må $\cos\delta = 0$, som er oppfylt dersom vi tek

$$\delta = \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Vidare får vi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A[\gamma\cos(\omega_d t - \delta) + \omega_d \sin(\omega_d t - \delta)]e^{-\gamma t} \\ \Rightarrow \quad \dot{x}(0) &= -A[\gamma\cos\delta - \omega_d\sin\delta] = -A[\gamma\cdot 0 - \omega_d\cdot 1] = A\omega_d. \end{aligned} \tag{20}$$

Vha. (17) får vi difor $A\omega_d = v_0$, dvs.

$$A = \frac{v_0}{\omega_d} = \frac{m}{M+m}\cdot\frac{u}{\omega_d}. \tag{21}$$

Oppgåve 3

(a) Sidan stanga er i mekanisk likevekt bruker vi Newtons 1. lov. Vi har 3 ukjende og treng difor 3 likningar. Vi bruker N1-trans i horisontal og vertikal retning samt N1-rot omkring punktet B:

$$\text{N1-trans i } x\text{-retning:} \quad \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f - S = 0, \tag{22}$$

$$\text{N1-trans i } y\text{-retning:} \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - Mg = 0, \tag{23}$$

$$\text{N1-rot om B:} \quad \sum \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad Mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 - SL\cos\theta_0 = 0. \tag{24}$$

I N1-rot brukte vi at (i) verken N eller f bidreg fordi begge krefter har null arm om B, (ii) tyngdekrafta verkar i massesenteret, som ligg midt i staven og har arm $\frac{L}{2}\sin\theta_0$ om B, (iii) snorkrafta verkar i A og har arm $L\cos\theta_0$ om B, (iv) tyngdekrafta og snorkrafta gir kraftmoment med motsett forteikn, sidan dei prøver å rotere staven i motsett retning. Likning (23) gir

$$N = Mg. \tag{25}$$

Likning (24) gir $S = \frac{Mg}{2}\tan\theta_0 = \frac{Mg}{2}\cdot 1 = \frac{Mg}{2}$. Vidare gir likning (22) at $f = S$. Dermed blir altså

$$f = S = \frac{Mg}{2}. \tag{26}$$

For at friksjonskrafta skal vere statisk (dvs. ingen gliing mot underlaget) må $|f| \le \mu_s|N|$, som gir $\frac{Mg}{2} \le \mu_s Mg$. Løyst mhp. μ_s gir dette følgjande vilkår på den statiske friksjonskoeffisienten:

$$\mu_s \ge \frac{1}{2}. \tag{27}$$

(b) Kun tyngdekrafta gjer arbeid (normalkrafta og friksjonskrafta som verkar ved B gjer ikkje arbeid, fordi staven flyttar seg ikkje ved B). Vi kan difor bruke bevaring av mekanisk energi for å finne vinkelhastigheita ω, sidan ω inngår i den kinetiske energien til staven, gitt av $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ der I er tregleiksmomentet til staven omkring rotasjonsaksen ved endepunktet B. Bruk av Steiners sats (parallellakseteoremet) og uttrykket $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$ for tregleiksmomentet om massesenteret gir, sidan avstanden b mellom massesenteret og B er $L/2$,

$$I = I_{\text{cm}} + Mb^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2. \tag{28}$$

Den potensielle energien er bestemt av høgda h til massesenteret midt i staven. Når vinkelen mellom staven og vertikalretninga er θ, er $h = \frac{L}{2}\cos\theta$. Bevaring av mekanisk energi gir difor

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mgh_0. \tag{29}$$

Innsetjing av uttrykka for I og h, samt $\omega_0 = 0$ (sidan staven startar frå ro), gir då

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta = Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0. \tag{30}$$

Vi set inn $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{2}$ og løyser mhp. ω, som gir

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right)}. \tag{31}$$

Dette uttrykket kan også brukast vidare til å finne vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right)}}_{=\omega}} \cdot \frac{3g}{L}\sin\theta \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega} = \frac{3g}{2L}\sin\theta. \tag{32}$$

(Her brukte vi kjerneregelen og derivasjon av ei kvadratrot.) Alternativt, og matematisk enklare, kan α finnast frå N2-rot om B. Kraftmomentet kjem her kun frå tyngdekrafta som verkar i massesenteret. Dermed:

$$\sum \tau = Mg\frac{L}{2}\sin\theta \overset{\text{N2}-\text{rot}}{=} I\alpha = \frac{1}{3}ML^2\alpha, \tag{33}$$

som løyst mhp. α sjølvsagt gir same svar som over:

$$\alpha = \frac{3g}{2L}\sin\theta. \tag{34}$$

Dette resultatet kan også brukast til å finne ω, dersom ein ikkje allereie har funne ω vha. energibevaring. Merk først at sidan α avheng av θ, og sidan θ endrar seg under staven sin bevegelse, er α **ikkje konstant**, så likningar som er gyldige for konstant α kan ikkje brukast for å finne ω i dette problemet. I staden må ein starte frå $\alpha = d\omega/dt$, som gir

$$d\omega = \alpha\, dt. \tag{35}$$

Vi kjenner α som funksjon av θ, ikkje t. Vi byter difor integrasjonsvariabel frå t til θ vha. $\omega = d\theta/dt$ som gir $dt = d\theta/\omega$ slik at $d\omega = \alpha d\theta/\omega$. Innsetjing av (34) gir då

$$\omega\, d\omega = \frac{3g}{2L}\sin\theta d\theta. \tag{36}$$

Integrerer ein no begge sider av denne likninga (for venstresida er integrasjonsgrensene hhv. 0 og ω, og for høgresida er grensene hhv. θ_0 og θ) får ein

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{3g}{2L}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{37}$$

som igjen gir uttrykket (31) etter å ha sett inn for $\cos\theta_0$.

(c) Umiddelbart etter at snora er kutta, er staven i ro ved vinkelen θ_0, så

$$\omega = 0, \tag{38}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{39}$$

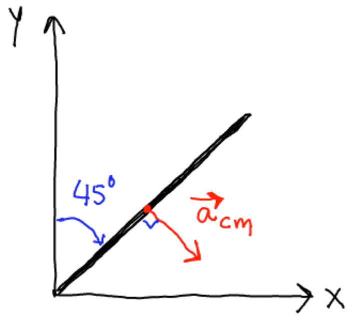
Frå desse uttrykka kan vi finne komponentane til akselerasjonen til massesenteret (cm) radielt og tangensielt til bana, som i tur, via N2, kan relaterast til kreftene på staven. Massesenteret bevegar seg i ei sirkelbane om B med radius $L/2$. Radialkomponenten (dvs. sentripetalakselerasjonen) og tangensialkomponenten av akselerasjonen til cm er difor hhv.

$$a_{\text{cm,c}} = \frac{L}{2}\omega^2 = 0, \tag{40}$$

$$a_{\text{cm,t}} = \frac{L}{2}\alpha = \frac{3g}{4\sqrt{2}}. \tag{41}$$

Dette betyr at akselerasjonsvektoren $\vec{a}_{\text{cm}}$ peikar langs bana, dvs. normalt på staven, og har storleik $|a_{\text{cm}}| = \frac{3g}{4\sqrt{2}}$. La oss dekomponere $\vec{a}_{\text{cm}}$ i horisontal- og vertikalretninga, sidan friksjons- og normalkrafta ligg i dei retningane. Sidan $\theta_0 = 45°$ blir desse akselerasjonskomponentane

$$a_{\text{cm,x}} = -a_{\text{cm,y}} = |a_{\text{cm}}|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3g}{8} \tag{42}$$



(sjå figuren). Vi bruker no N2 til å finne kreftene:

$$\sum F_x = f = Ma_{\text{cm,x}} = \frac{3Mg}{8}, \tag{43}$$

$$\sum F_y = N - Mg = Ma_{\text{cm,y}} = -\frac{3Mg}{8}, \tag{44}$$

som gir

$$f = \frac{3Mg}{8} \quad \text{og} \quad N = \frac{5Mg}{8}. \tag{45}$$

Vilkåret på statisk friksjonskraft er igjen $|f| \leq \mu_s |N|$, som her gir $\frac{3Mg}{8} \leq \mu_s \frac{5Mg}{8}$, dvs.

$$\mu_s \geq \frac{3}{5}. \tag{46}$$

Sidan $3/5 > 1/2$ er dette eit strengare vilkår på μ_s enn vilkåret (27) funne i (a), som difor ikkje er tilstrekkjeleg til at stanga ikkje skal byrje å gli umiddelbart etter at snora er kutta.

Oppgåve 4

(a) Likningar (tek positiv translasjonsretning nedover, tilhøyrande positiv rotasjonsretning med klokka, antar retning på statisk friksjonskraft f oppover):

$$\text{N2-trans langs skråplanet:} \quad Mg\sin\theta - f = Ma, \tag{47}$$

$$\text{N2-rot om rotasjonsaksen:} \quad fR = I\alpha, \tag{48}$$

$$\text{Rein rulling:} \quad a = R\alpha. \tag{49}$$

(Verken normalkrafta eller tyngdekrafta har arm om rotasjonsaksen, så dei bidreg ikkje til N2-rot.) Desse tre likningane kan brukast til å finne dei tre ukjende a, α, og f (i tillegg kan normalkrafta N evt. finnast frå N2-trans normalt skråplanet). Likningane (48)-(49) med $I = (1/2)MR^2$ gir $f = Ma/2$. Set ein dette inn i (47) og løyser for a får ein

$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta \tag{50}$$

og dermed blir friksjonskrafta

$$f = \frac{1}{3} Mg \sin\theta. \tag{51}$$

Sidan f er positiv er retninga på krafta oppover langs skråplanet, som vi antok.

(b) Sidan $v < \omega R$ har kontaktpunktet mot underlaget ein hastigheit *nedover* skråplanet. Friksjonskrafta er difor kinetisk, med retning *oppover* skråplanet (for å motverke bevegelsen mellom kontaktpunktet og underlaget) og storleik $f = \mu N = \mu Mg\cos\theta$ (sidan $N = Mg\cos\theta$, som følgjer frå N1-trans normalt skråplanet). Vi finn akselerasjonen a til massesenteret vha. N2-trans langs skråplanet. Val av positiv retning oppover gir

$$f - Mg\sin\theta = Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) = Ma \quad \Rightarrow \quad a = g(\mu\cos\theta - \sin\theta). \tag{52}$$

Akselerasjon oppover skråplanet svarar til $a > 0$, som skjer dersom $\mu\cos\theta - \sin\theta > 0$, dvs. vilkåret blir

$$\mu > \tan\theta. \tag{53}$$

(c) Vi får rein rulling når $v = R\omega$. For å finne ut når dette skjer treng vi først $v(t)$ og $\omega(t)$. Sidan a er konstant (fordi uttrykket for a inneheld kun konstante parametrar) kan vi finne $v(t)$ vha. konstant-akselerasjon-likninga:

$$v(t) = v(0) + at = 0 + g(\mu\cos\theta - \sin\theta)t = g(\mu\cos\theta - \sin\theta)t. \tag{54}$$

For å finne $\omega(t)$ treng vi vinkelakselerasjonen α, som kan finnast frå N2-rot om rotasjonsaksen. Sidan vi har valt positiv translasjonsretning oppover, blir tilhøyrande positiv rotasjonsretning mot klokka. Friksjonskrafta, som verkar oppover, gir difor eit negativt kraftmoment, sidan den prøver å rotere sylinderen med klokka. N2-rot blir difor

$$\sum \tau = -fR = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2f}{MR} = -\frac{2\mu g\cos\theta}{R}. \tag{55}$$

Sidan α er konstant (same grunngjeving som for a over) kan vi finne $\omega(t)$ vha. konstant-vinkelakselerasjonlikninga

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g\cos\theta}{R}t. \tag{56}$$

Vi ser at $v(t)$ aukar frå 0, mens $\omega(t)$ minkar frå ω_0. Etter ei viss tid t_r vil då vilkåret for rein rulling bli oppfylt. Vi har

$$v(t_r) = R\omega(t_r) \qquad \Rightarrow \qquad g(\mu\cos\theta - \sin\theta)t_r = R\omega_0 - 2\mu g\cos\theta t_r \tag{57}$$

$$\Rightarrow \quad t_r = \frac{R\omega_0}{g(3\mu\cos\theta - \sin\theta)} \tag{58}$$

Hastigheiten ved tida t_r er

$$v(t_r) = g(\mu\cos\theta - \sin\theta)t_r = \frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{3\mu\cos\theta - \sin\theta}R\omega_0 = \frac{\mu - \tan\theta}{3\mu - \tan\theta}R\omega_0. \tag{59}$$