

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4108 Fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad

Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 7. august 2015

Eksamenstid (fra-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne

K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver)

Annen informasjon:

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen. I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt i en oppgave selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellisten for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten. Oppgave 2-4 er om klassisk mekanikk. Formellisten for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (inkludert forside og vedlegg): 6

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 (teller 25 %)

En partikkel med masse m og potensiell energi

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

kalles en harmonisk oscillator, med vinkelfrekvens ω . Dette systemet har kun diskrete energinivåer. Det oppgis at bølgefunksjonen for den stasjonære tilstanden med lavest mulig energi (dvs. grunntilstanden) har romlig del på formen

$$\psi(x) = A e^{-\alpha x^2} \quad (2)$$

der A og α er konstanter. Alle forventningsverdier $\langle F \rangle$ i denne oppgaven skal forstås å være for grunntilstanden.

a) Vis at $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$ og bestem grunntilstandsenergien.

b) Bestem normeringskonstanten A .

c) Vis at både $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ er lik 0. (Hint: Symmetri-argumenter kan brukes for å forenkle utregningene.)

d) Regn ut $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$. Bestem usikkerhetene Δx og Δp og verdien av produktet $\Delta x \Delta p$.

e) Vis at $\langle E \rangle$ er lik grunntilstandsenergien.

Oppgitte resultater for oppgave 1 som kan være nyttige (listen fortsetter på neste side):

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengde	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x, p)$	$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p})$

Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

Løsning av TASL: $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ der $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$.

Normeringskrav: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = 1$, $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

Forventningsverdi, fra sannsynlighetsfordelingen:

$$\langle g(F) \rangle = \sum_F g(F) P(F) \quad (\text{diskret}), \quad \langle g(F) \rangle = \int dF g(F) P(F) \quad (\text{kontinuerlig}).$$

Forventningsverdi, fra bølgefunksjonen: $\langle g(F) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x, t) g(\hat{F}) \Psi(x, t)$.

Usikkerhet: $\Delta F = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}$.

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon for posisjon og bevegelsesmengde: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Eigenverdiligning: $\hat{F}\Theta_\alpha(x) = f_\alpha\Theta_\alpha(x)$.

Noen integraler (her er β en reell positiv konstant):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\beta x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\beta x^2} = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

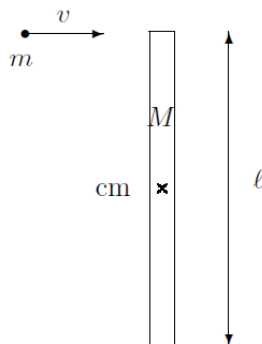
Oppgave 2 (teller 20 %)

En fjær med fjærkonstant k er hengt opp i taket. Et lodd med masse m henges ved tiden $t = 0$ i fjæren. Tyngdens akselerasjon er g .

a) Basert på kreftene som virker på loddet (se bort fra demping), sett opp en differensialligning for loddets vertikale posisjon $x(t)$ (la $x = 0$ ved loddets vertikaleposisjon ved $t = 0$, og la positiv x -retning være nedover). Løsningen av differensialligningen kan skrives på formen $x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t + C$. Bestem konstantene Ω , A , B og C . Hva blir henholdsvis $x_{\max}$ og $x_{\min}$?

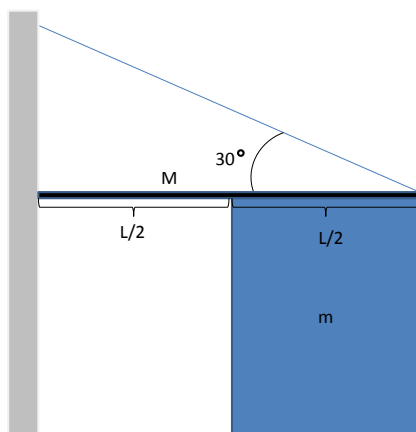
b) Forklar uten regning hvordan en liten dempningskraft vil endre resultatet. Skissér $x(t)$ uten og med demping. For det dempede tilfellet, hvilken verdi går x mot når $t \rightarrow \infty$?

Oppgave 3 (teller 20 %)



a) En tynn stav med lengde ℓ , masse M og treghetsmoment $I = \frac{1}{12}M\ell^2$ ligger på ei friksjonsfri horisontal flate (papirplanel). Et prosjektil med masse $m \ll M$ skytes inn mot staven med stor fart v i retning 90° på staven som vist i figuren til venstre. Prosjektilet treffer staven i enden (i avstand $\ell/2$ fra massesenteret cm) og setter seg fast i staven. Staven vil etter kollisjonen få en kombinert translasjons- og rotasjonsbevegelse, der massesenterets translasjonsfart angis med v' og stavens vinkelhastighet om massesenteret med ω' . Merk at staven ikke er hengslet i noe punkt.

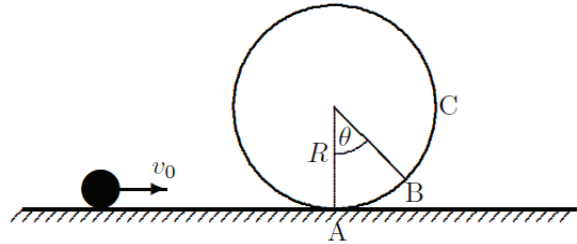
Sett opp total bevegelsesmengde før (p) og etter (p') kollisjonen og totalt spinn om massesenteret cm før (L) og etter (L') kollisjonen. Bestem forholdet v'/ω' . (Du kan forenkle uttrykk slik at de er gyldig til ledende orden i det lille forholdet m/M .)



b) Et flagg med masse m henger ned fra den ytre halvparten av en horisontal flaggstang med masse M og lengde L . En kabel fra stangens ytterste ende er festet til et punkt på veggen bak stangen. Kabelen danner en vinkel på 30° med flaggstangen. Se figuren til venstre. Finn strekkraften S i kabelen uttrykt ved m , M og tyngdens akselerasjon g .

Oppgave 4 (teller 35 %)

En massiv kule med radius r og masse m ruller med hastighet v_0 på et horisontalt underlag inn mot en loop med radius R (kuleradien r er *ikke* neglisjerbar i forhold til loopradien R). Initialhastigheten v_0 er stor nok til at kula ruller rent gjennom hele loopen én gang uten å miste kontakten med underlaget, for så å fortsette på horisontalt underlag. Trehetsmomentet for kula er $I = \frac{2}{5}mr^2$. Tyngdens akselerasjon er g .



- a) Vis at kulas kinetiske energi kan uttrykkes som $E_k = \frac{7}{10}mv^2$ når kulas (translasjons)hastighet er v .
- b) Finn et uttrykk for kulas hastighet v ved punkt C i loopen (dvs. når $\theta = 90^\circ$). (Merk at friksjonen gir ikke energitap ved ren rulling.)
- c) Finn et uttrykk for akselerasjonen a til kulas massesenter i retningen tangensielt til banen når kula er ved et vilkårlig punkt B mellom A og C (dvs. $0 \leq \theta \leq 90^\circ$). Finn også et uttrykk for friksjonskraften f i B. Hva er retningen til friksjonskraften? (Hint: Analysér kulens bevegelse langs retningen tangensielt til banen.)
- d) Finn betingelsen på friksjonskoeffisienten μ for at kula skal rulle rent ved punkt C, uttrykt ved oppgitte parametre.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad c = 2,9997 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å = 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{der} \quad \vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \vec{\alpha}: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Newtons gravitasjonslov: } \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad E_p(r) = -G \frac{M}{r} m \quad G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\text{Arbeid: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{Kinetisk energi: } E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p(\vec{r}) = \text{potensiell energi (tyngde: } mgh, \text{ fjær: } \frac{1}{2}kx^2) \quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$$

$$\text{Konservativ kraft: } \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r}) \quad \text{f.eks. } F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_p(x, y, z) \quad \text{Hookes lov (fjær): } F_x = -kx$$

$$\text{Tørr friksjon: } |F_f| \leq \mu_s F_\perp \text{ eller } |F_f| = \mu_k F_\perp \quad \text{Våt friksjon: } \vec{F}_f = -k_f \vec{v} \text{ eller } \vec{F}_f = -bv^2 \hat{v}$$

$$\text{Kraftmoment (dreiemoment): } \vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}, \text{ med } \vec{r}_0 \text{ som valgt referansepunkt} \quad \text{Arbeid: } dW = \tau d\theta$$

$$\text{Betingelser for statisk likevekt: } \Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Sigma \vec{\tau}_i = \vec{0}, \text{ uansett valg av referansepunkt } \vec{r}_0 \text{ i } \vec{\tau}_i$$

$$\text{Massesenter (tyngdepunkt): } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad M = \sum m_i$$

$$\text{Kraftimpuls: } \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt = m\Delta \vec{v} \quad \text{Alle støt: } \sum \vec{p}_i = \text{konstant} \quad \text{Elastisk støt: } \sum E_i = \text{konstant}$$

$$\text{Vinkelhastighet: } \vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}} \quad |\vec{\omega}| = \omega = \dot{\phi} \quad \text{Vinkelakselerasjon: } \vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt \quad \alpha = d\omega/dt = \ddot{\phi}$$

$$\text{Sirkelbev.: } v = r\omega \quad \text{Sentripetalaks.: } \vec{a} = -v\omega \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2 \hat{\mathbf{r}} \quad \text{Baneaks.: } a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\text{Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad \text{stive legemer: } \vec{L} = I \vec{\omega} \quad \vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{Rotasjonsenergi: } E_{k, \text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

$$\text{der treghetsmoment } I \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm \quad \text{med } r = \text{avstanden fra } m_i \text{ (dm) til rotasjonsaksen.}$$

Med aksene gjennom massemidtpunktet: $I \rightarrow I_0$, og da gjelder:

$$\text{kule: } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \quad \text{sylder/skive: } I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{Åpen sylinder/ring: } I_0 = MR^2$$

$$\text{lang, tynn stav: } I_0 = \frac{1}{12} M\ell^2 \quad \text{Parallellaksesteoremet (Steiners sats): } I = I_0 + Mb^2$$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{r}$,
og tyngdepunksbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = d\vec{R}/dt)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0 \vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\vec{\tau}_{\text{tot}} = d\vec{L}_{\text{tot}}/dt$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$, der $\sin \theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta)$ med $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+ e^{-\alpha^{(+)} t} + A^- e^{-\alpha^{(-)} t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \text{der} \quad x_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

“Rakettlikningen”: $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_Y + \beta \vec{u}_{\text{ex}}$ der $\beta = \frac{dm}{dt}$ og $\vec{u}_{\text{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse