TFY4108 Fysikk: Løysing ordinær eksamen 11. des. 2014

Oppgåve 1

(a) Vi brukar normeringskravet $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2$ for bølgjefunksjonen ved $t=0$. Innsetjing for $|\Psi(x,0)|^2 = \Psi^*(x,0)\Psi(x,0)$ gir

$$\begin{aligned}
1 &= |A|^2 \int_0^L dx\, x^2(L-x)^2 = |A|^2 \int_0^L dx\,(L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4) = |A|^2 \left(L^2 \frac{1}{3}x^3 - 2L\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right)\Bigg|_0^L \\
&= |A|^2 L^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = |A|^2 L^5 \frac{10-15+6}{30} = |A|^2 L^5 \frac{1}{30} \quad \Rightarrow \quad |A| = \sqrt{\frac{30}{L^5}}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(b) I dette delspørsmålet var det tilstrekkjeleg å svare på enten (i) eller (ii), men her presenterer vi sjølvsagt løysing til begge.

(i) Med $\hat{x} = x$ vert

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,0)\hat{x}\Psi(x,0) = \int_0^L dx\, x|\Psi(x,0)|^2 \qquad (2)$$

Bølgjefunksjonen $\Psi(x,0)$ er symmetrisk om punktet $x = L/2$. Bevis: Ved spegling om punktet $L/2$ går punktet x til punktet $L-x$. For x i brønnen får ein då $\Psi(L-x,0) = A(L-x)(L-(L-x)) = A(L-x)x = \Psi(x,0)$. QED. Det følgjer vidare at også sannsynstettleiken $|\Psi(x,0)|^2$ er symmetrisk om $L/2$. Dermed vert $\langle x \rangle$, som er "tyngdepunktet" til sannsynstettleiken, lik $L/2$.[1]

(ii) Med $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ vert

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,0)\hat{p}\Psi(x,0) = \frac{\hbar}{i}\int_0^L dx\, \Psi^*(x,0)\frac{d}{dx}\Psi(x,0). \qquad (3)$$

Sidan $\Psi(x,0)$ er symmetrisk om $L/2$, vert $\frac{d}{dx}\Psi(x,0)$ antisymmetrisk om $L/2$. Integranden er dermed produktet av ein funksjon som er symmetrisk og ein funksjon som er antisymmetrisk om midtpunktet $L/2$ av integrasjonsområdet. Integralet blir difor null, så $\langle p \rangle = 0$.

Eit alternativt argument er som følgjer: Innsetjing for bølgjefunksjonen i (3) gir

$$\langle p \rangle = -i\hbar|A|^2 \int_0^L dx\, x(L-x)\frac{d}{dx}x(L-x). \qquad (4)$$

Høgresida er reint imaginær, fordi bortsett frå faktoren i er alt reelt på høgresida. Men sidan $\langle p \rangle$ er forventningsverdien til ein fysisk observabel, må $\langle p \rangle$ vere reell. Det kan kun skje om talet som multipliserer i er null, dvs. integralet i (4) må vere null. Dermed blir $\langle p \rangle = 0$.

Det er kanskje også verdt å poengtere at sjølv om Ehrenfests teorem, som ein vanlegvis skriv $\langle p \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, sjølvsagt held, kan det ikkje brukast her til å finne $\langle p \rangle$, fordi vi ikkje har nok informasjon om $\langle x \rangle$ som funksjon av tida t til å rekne ut den deriverte $d\langle x \rangle/dt$ i tidspunktet $t=0$. For å rekne ut denne, er det ikkje nok å kjenne $\langle x \rangle$ i tidspunktet $t=0$ (som er alt vi har oppgitt), ein må minst kjenne $\langle x \rangle$ i ein infinitesimal omegn om tidspunktet $t=0$. (Ein må ikkje forveksle uttrykket (2), som er $\langle x \rangle$ ved tida $t=0$, med $\langle x \rangle$ for ei vilkårleg tid t.)

(c)

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,0)\hat{x}^2\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2|\Psi(x,0)|^2 = |A|^2\int_0^L dx\, x^2x^2(L-x)^2 \\
&= |A|^2 \int_0^L dx\,(L^2x^4 - 2Lx^5 + x^6) = |A|^2\left(L^2\frac{1}{5}x^5 - 2L\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \right)\Bigg|_0^L \\
&= |A|^2 L^7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = |A|^2 L^7 \frac{21-35+15}{105} = |A|^2 L^7 \frac{1}{105} = \frac{30}{105}L^2 = \frac{2}{7}L^2, \qquad (5)
\end{aligned}$$

[1] Denne konklusjonen avheng kun av at sannsynstettleiken er symmetrisk om punktet $L/2$ og held difor uavhengig av verdien av sannsynstettleiken i dette punktet. For vår bølgjefunksjon har sannsynstettleiken eit maksimum i $L/2$, men dette er altså irrelevant; sannsynstettleiken kunne like gjerne hatt eit minimum, eller verken eit minimum eller maksimum, i $L/2$.

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,0)\hat{p}^2\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,0)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi(x,0) = -\hbar^2|A|^2\int_0^L dx\,x(L-x)\underbrace{\frac{d^2}{dx^2}x(L-x)}_{=-2}\\ &= 2\hbar^2|A|^2\int_0^L dx\,(Lx-x^2) = 2\hbar^2|A|^2\left(L\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^L = 2\hbar^2|A|^2L^3\frac{1}{6} = 10\frac{\hbar^2}{L^2}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Dette gir uvissene

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{2}{7}L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2} = L\sqrt{\frac{2}{7}-\frac{1}{4}} = L\sqrt{\frac{8-7}{28}} = \frac{L}{\sqrt{28}} = \frac{L}{2\sqrt{7}}, \qquad (7)\\ \Delta p &= \sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2} = \sqrt{10\frac{\hbar^2}{L^2}-0^2} = \sqrt{10}\frac{\hbar}{L}. \qquad (8)\end{aligned}$$

Produktet av uvissene er

$$\Delta x\Delta p = \frac{L}{2\sqrt{7}}\sqrt{10}\frac{\hbar}{L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{7}}\,\hbar \approx 0.598\,\hbar. \qquad (9)$$

Vi ser at produktet tilfredsstiller Heisenbergs uvisserelasjon $\Delta x\Delta p \geq \hbar/2$, slik det sjølvsagt burde. Resultatet er difor som forventa.

(d) Den oppgitte tilstanden $\Psi(x,t)$ er **ikkje** ein stasjonær tilstand. Ein stasjonær tilstand ville hatt forma

$$\psi_\ell(x)e^{-iE_\ell t/\hbar} \qquad (10)$$

der ℓ er eit bestemt positivt heiltal. Tilstanden $\Psi(x,t)$ er ikkje på denne forma, fordi den er ein lineærkombinasjon av fleire stasjonære tilstander med forskjellig energi.

Alternativt (men meir tungvint) kan ein argumentere basert på sannsynstettleiken $|\Psi(x,t)|^2$, som vert

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \sum_n\sum_m c_n^*c_m e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\psi_n^*(x)\psi_m(x). \qquad (11)$$

Med koeffisientane gitt som i likning (3) i oppgåveteksten, vil ledda der n og m er forskjellige positive odde heiltal gi tidsavhengige bidrag til summen, pga. faktorane $e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}$. Dermed vert $|\Psi(x,t)|^2$ tidsavhengig, som betyr at $\Psi(x,t)$ ikkje er ein stasjonær tilstand.

Eit anna argument er at for ein stasjonær tilstand er uvissa i energien null: $\Delta E = 0$. Men den oppgitte tilstanden $\Psi(x,t)$ har $\Delta E > 0$ fordi sannsynet $P(E_n) > 0$ for meir enn éin verdi av E_n (dette argumentet føregrip svaret i (e)).

(e)

$$P(E_n) = |c_n|^2 = \begin{cases}\left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3n^3}\right)^2 & \text{for } n=1,3,5,\ldots\\ 0 & \text{for } n=2,4,6,\ldots\end{cases} \qquad (12)$$

Ein ser at $P(E_n)$ er størst for $n=1$. Dermed er det mest sannsynleg å måle verdien E_1.

Oppgåve 2

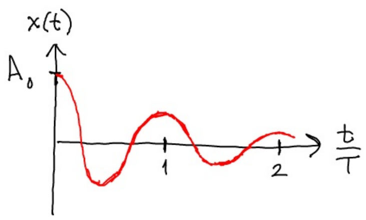
(a) Det verkar 3 krefter på blokka: Fjørkrafta $-kx$, dempingskrafta $-b\dot{x}$, og tyngdekrafta Mg (sidan alle kreftene verkar i vertikalretninga, er vektornotasjon ikkje naudsynt). Likevekt mellom fjørkrafta og tyngdekrafta avgjer likevektsposisjonen. Utover dette har tyngdekrafta ingen innverknad på systemet. Om ein set nullpunktet $x=0$ for fjørkrafta i likevektsposisjonen kan ein difor utelate tyngdekrafta frå rørslelikninga (Newtons 2. lov) i vertikalretninga, som dermed blir

$$\sum F_x = -kx - b\dot{x} = ma = m\ddot{x} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x = 0. \qquad (13)$$

Denne kan evt. omskrivast som
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{14}$$
der $\gamma \equiv b/2m$ og $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$.

(b) Initialvilkåra vert
$$x(0) = A_0, \tag{15}$$
$$\dot{x}(0) = 0, \tag{16}$$
der vi har valt x positiv nedover (med x valt positiv oppover, ville (15) ha vorte erstatta av $x(0) = -A_0$). Sidan $x(t) = A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t - \delta)$ gir (15)
$$A\cos\delta = A_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\cos\delta}. \tag{17}$$
Vidare har vi
$$\dot{x}(t) = A\,e^{-\gamma t}\left[-\gamma\cos(\omega_d t - \delta) - \omega_d \sin(\omega_t - \delta)\right], \tag{18}$$
slik at (16) gir, etter korting av $A\,e^{-\gamma t} \neq 0$,
$$-\gamma\cos\delta + \omega_d\sin\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\delta = \frac{\gamma}{\omega_d} \tag{19}$$
(i det føregåande har vi også brukt $\cos(-\delta) = \cos\delta$, $\sin(-\delta) = -\sin\delta$). Sidan γ og ω_d er positive, blir $\tan\delta$ positiv, konsistent med at δ ligg enten i 1. eller 3. kvadrant. Dei enklaste uttrykka får vi ved å velje δ i 1. kvadrant; då blir
$$\delta = \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega_d}\right) \tag{20}$$
og $\cos\delta$ blir positiv, slik at $\cos\delta = +1/\sqrt{1+\tan^2\delta}$. Likning (17) gir då
$$A = A_0\sqrt{1 + (\gamma/\omega_d)^2}. \tag{21}$$

(c) Den mekaniske energien til blokka kan som vanleg finnast frå rørselikninga til systemet. Sidan tyngdekrafta ikkje inngår i rørslelikninga, som tek same form som for horisontal bevegelse, tek også den mekaniske energien same form som for horisontal bevegelse, dvs. ved tida t er den gitt som
$$E(t) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t). \tag{22}$$
Den potensielle energien $-Mgx(t)$ frå tyngden inngår altså ikkje eksplisitt i uttrykket for $E(t)$. Pga. friksjonsarbeidet til dempingskrafta er den mekaniske energien ikkje bevart, men minkar med tida. Ved tida $t = 0$ har vi $\dot{x}(0) = 0$, slik at kun potensiell energi bidreg:
$$E(0) = \frac{1}{2}kx^2(0) = \frac{1}{2}kA_0^2. \tag{23}$$
Sidan svingeperioden er $T = 2\pi/\omega_d$, har blokka gjennomført N heile svingingar ved tida $t_N = NT = 2\pi N/\omega_d$. Ved denne tida har posisjonen $x(t)$ eit lokalt maksimum (som skjematisk skissert i figuren under), slik at hastigheita $\dot{x}(t_N) = 0$, så det er igjen kun potensiell energi som bidreg til mekanisk energi.

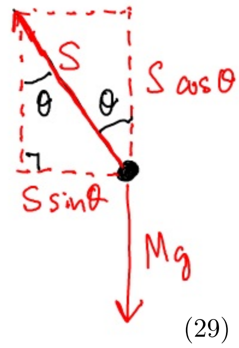


Utsvinget $x(t_N)$ er redusert i forhold til utsvinget $x(0)$ med dempingsfaktoren $e^{-\gamma t_N}$. Dermed blir
$$E(t_N) = \frac{1}{2}kx^2(t_N) = \frac{1}{2}k(A_0 e^{-2\pi N\gamma/\omega_d})^2. \tag{24}$$
Forholdet mellom energiane ved dei to tidspunkta blir dermed
$$\frac{E(t_N)}{E(0)} = e^{-4\pi N\gamma/\omega_d}. \tag{25}$$

Oppgåve 3

(a) Det verkar to krefter på kula: Snorkrafta med storleik S verkar langs snora, og tyngden med storleik Mg verkar i vertikalretninga. Kula går i ei sirkelbane i horisontalplanet med radius $R = L\sin\theta$, slik at akselerasjonen i radialretninga blir $a_{\mathrm{rad}} = v^2/R = \omega^2 R = \omega^2 L \sin\theta$. N2 i radialretninga blir då (positiv retning valt innover)

$$S\sin\theta = Ma_{\mathrm{rad}} = M\omega^2 L\sin\theta. \tag{26}$$



Ei sirkelbane med endeleg radius krev $\sin\theta \neq 0$, så med denne antakelsen kan vi dele likninga på $\sin\theta$, som gir

$$S = M\omega^2 L. \tag{27}$$

I vertikalretninga er det likevekt, dvs. null akselerasjon, så N2 (evt. N1) i vertikalretninga gir

$$S\cos\theta - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{Mg}{S}. \tag{28}$$

Innsetjing av (27) gir då

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right). \tag{29}$$

Når $\omega \to \infty$, ser vi frå (27) og (29) at

$$S \to \infty \quad \text{og} \quad \theta \to \pi/2. \tag{30}$$

Så i grensa $\omega \to \infty$ vil snora bli horisontal og snorkrafta som trengst for å halde kula i sirkelbane vil gå mot uendeleg. Dette stemmer med vår intuisjon.

(b) Sidan generelt $\cos\theta \leq 1$, og vi har vidare anteke (som diskutert etter (26)) at $\sin\theta \neq 0$, får vi betingelsen $\cos\theta < 1$. Via (29) gir dette

$$\frac{g}{\omega^2 L} < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{L}} \equiv \omega_{\mathrm{min}}. \tag{31}$$

Verdien $\omega_{\mathrm{min}} = \sqrt{g/L}$ er difor ei nedre grense for vinkelhastigheita ω for å ha ein sirkelbevegelse som beskrive. (I grensa $\omega \to \omega_{\mathrm{min}}$ får ein $S \to M(g/L)L = Mg$ og $\theta \to 0$.)

(c) Med $\omega = 0$ innsett i (26) får ein

$$S\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \tag{32}$$

($\theta = \pi$ er ikkje ei løysing, fordi sidan S ikkje kan vere negativ impliserer (28) $\cos\theta$ ikkje-negativ). Set ein $\theta = 0$ inn i (28) blir snorkrafta

$$S = Mg. \tag{33}$$

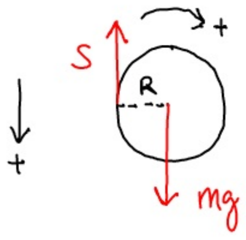
Situasjonen svarar til at kula er i ro og heng rett ned, slik at snorkrafta balanserer tyngdekrafta.

Oppgåve 4

(a) Sidan snora viklast av sylinderen utan å gli, kan ein seie at sylinderen rullar reint på snora. Dette gir $v = R\omega$ og dermed, ved tidsderivasjon,

$$a = R\alpha \tag{34}$$

der v og a er høvesvis hastigheit og akselerasjon til massesenteret, og ω og α er høvesvis vinkelhastigheit og vinkelakselerasjon om rotasjonsaksen (sylinderaksen) gjennom massesenteret. Her har vi valt positiv translasjonsretning nedover og tilhøyrande positiv rotasjonsretning med klokka. Vidare får vi likningane



$$\text{N2-trans i vertikal retning:} \quad mg - S = ma, \tag{35}$$

$$\text{N2-rot om rotasjonsaksen:} \quad SR = I\alpha, \tag{36}$$

der S er snorkrafta og $I = (1/2)mR^2$ er tregleiksmomentet om rotasjonsaksen (Tyngdekrafta bidreg ikkje til N2-rot fordi den verkar i massesenteret og har dermed null arm om rotasjonsaksen). Ved å løyse dei tre likningane (34)-(36) for dei tre ukjende a, α og S finn ein

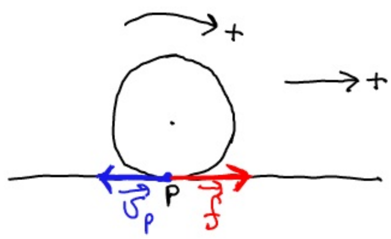
$$a = \frac{2g}{3}, \quad \alpha = \frac{2g}{3R}, \quad S = \frac{mg}{3}. \tag{37}$$

(b) Sidan snora ikkje glir på sylinderflata gjer ikkje snorkrafta arbeid. Kun tyngdekrafta gjer difor arbeid, slik at mekanisk energi er bevart. På toppen er mekanisk energi kun potensiell, gitt ved mgh. På botnen er mekanisk energi kun kinetisk, gitt ved summen av translasjonsbidraget $(1/2)mv^2$ og rotasjonsbidraget $(1/2)I\omega^2$, som vha. rullebetingelsen $v = R\omega$ og innsetjing for I kan forenklast til $(1/2)m(R\omega)^2 + (1/2)(1/2)mR^2\omega^2 = (3/4)mR^2\omega^2$. Bevaring av mekanisk energi gir difor

$$\frac{3}{4}mR^2\omega^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{4gh}{3R^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{38}$$

Alternativt kan ein bruke resultat for a eller α frå deloppgåve (a). Sidan uttrykka for desse storleikane er konstantar, gjeld likningar for konstant (vinkel-)akselerasjon. Same svar for ω som over finn ein då ved å bruke enten (i) $v^2 - v_0^2 = 2ah$ med $v = R\omega$ og $v_0 = 0$ eller (ii) $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$ med $\omega_0 = 0$ og $\theta = h/R$.

(c)
Sidan $R\omega_0 > v_0$ har hastigheitsvektoren $\vec{v}_P$ i sylinderen sitt kontaktpunkt mot underlaget retning mot venstre og storleik $R\omega_0 - v_0$ ved posisjonen A. Friksjonskrafta er då kinetisk og peikar i motsett retning av $\vec{v}_P$, dvs. mot høgre, med storleik $f = \mu N = \mu mg$ sidan $N = mg$ følgjer frå N1 i vertikalretninga. Friksjonskrafta vil ha denne retninga og verdien til hastigheiten $\vec{v}_P$ blir 0, dvs. til tidspunktet når sylinderen byrjar å rulle reint.



Med val av positiv translasjonsretning mot høgre og positiv rotasjonsretning med klokka får ein

$$\text{N2-trans i horisontal retning:} \quad f = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{f}{m} = \mu g, \tag{39}$$

$$\text{N2-rot om sylinderaksen:} \quad -fR = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2\mu g}{R}. \tag{40}$$

Sidan uttrykka for a og α er konstantar, kan ein bruke likningar for konstant (vinkel-)akselerasjon til å finne hastigheita og vinkelhastigheita:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 + \mu g t, \tag{41}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t \tag{42}$$

for tidsrommet $0 \leq t \leq t_r$. Ein ser at v aukar og ω minkar med tida, så det vil komme eit tidspunkt t_r då sylinderen byrjar å rulle reint, dvs. betingelsen for rein rulling held ved tida t_r: $v(t_r) = R\omega(t_r)$. Innsetjing av (41)-(42) i rullebetingelsen gir

$$v_0 + \mu g t_r = R\omega_0 - 2\mu g t_r \quad \Rightarrow \quad t_r = \frac{R\omega_0 - v_0}{3\mu g} \tag{43}$$

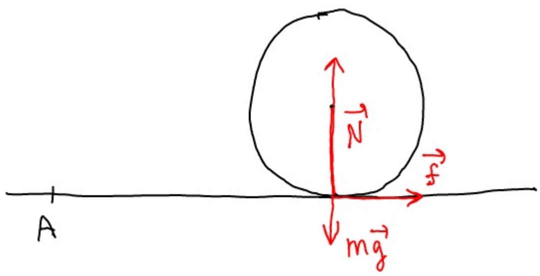
som innsett i (41) gir

$$v(t_r) = \frac{2}{3}v_0 + \frac{1}{3}R\omega_0. \tag{44}$$

(c) Spinnet $\vec{L}$ er relatert til netto kraftmoment $\vec{\tau}$ som

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{45}$$

Spinnet er dermed bevart dersom netto kraftmoment er null. Kreftene som kan bidra til kraftmomentet er friksjonskrafta $\vec{f}$, tyngdekrafta $m\vec{g}$ og normalkrafta $\vec{N}$. Fordi tyngdekrafta og normalkrafta har same arm mhp. A og er like store, men motsett retta, kansellerer deira bidrag til kraftmomentet. Vidare har friksjonskrafta null arm mhp. A, fordi forlenginga av den rette linja gjennom $\vec{f}$ går gjennom A, slik at heller ikkje friksjonskrafta bidreg til kraftmomentet. Netto kraftmoment er dermed null, så spinnet $\vec{L}$ om A er bevart.



Spinnet har her retning inn i planet. Storleiken L er gitt av (her er $\vec{r}$ vektoren frå A til CM)

$$L = |m\vec{r} \times \vec{v}| + I\omega = mRv + I\omega. \tag{46}$$

Spinnbevaring gir då

$$L(0) = L(t_r) \quad \Rightarrow \quad mRv_0 + I\omega_0 = mRv(t_r) + I\omega(t_r). \tag{47}$$

Set ein her inn $I = \frac{1}{2}mR^2$ og $\omega(t_r) = v(t_r)/R$ og løyser mhp. $v(t_r)$, finn ein igjen svaret (44).