

LØYSINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 1
TFY4108 FYSIKK, 14/12 - 2012

Oppgave 1.

(a) Tidsuavhengig Schr. lkn. inne i boksen: $(0 < x < L)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} (-1) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \psi = E \psi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}}} \quad \text{er grunntilstandsenergien}$$

(b) Sannsynstettheten er $|\psi(x)|^2$

$\Rightarrow$ sannsynet er

$$\int_{L/4}^{3L/4} dx |\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \int_{L/4}^{3L/4} dx \sin^2 \frac{\pi x}{L}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{y \equiv \frac{\pi x}{L}}{\cong} \frac{2}{L} \frac{L}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dy \sin^2 y = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} (y - \sin y \cos y) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] (\approx 0.82)}}$$

(2)

(c) (i) $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$

Sannsynsktetheten $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L}$
i botten är symmetrisk om
 $x = L/2 \Rightarrow \langle x \rangle = L/2$

(ii) $\langle p \rangle = 0$

Sidan tillstanden är stationär är $\langle p \rangle$ tidsuavhengig. Vet också att partikeln måste vara innanför ett begränsat område $0 < x < L$. Å ha $\langle p \rangle \neq 0$ (dvs. $\langle p \rangle > 0$ eller $\langle p \rangle < 0$) är inte förenligt med dessa egenskaper. Därmed måste $\langle p \rangle = 0$.

Alternativt:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$= \underbrace{-i\hbar}_{\text{imaginär}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}}_{\text{reell sedan } \psi^*(x) = \psi(x)} = iC \text{ med } C \text{ reell}$$

Men $\langle p \rangle$ måste vara reell sedan bevægelses-
mängd är en fysisk observabel. Därmed
må C vara 0 $\Rightarrow \langle p \rangle = 0$

(Det är nok å gi ett svar på enten (i) eller (ii))

(3)

$$(d) \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) x^2 \psi(x)$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L dx x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^{\pi} dy y^2 \sin^2 y$$

Integral ist er $\int_0^{\pi} dy y^2 \sin^2 y$

$$= \frac{1}{24} \left[4y^3 + (3 - 6y^2) \sin 2y - 6y \cos 2y \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{24} \left[4\pi^3 + 0 - 6\pi \cdot 1 - (0 + 0 - 0) \right]$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \left[1 - \frac{3}{2\pi^2} \right]$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x)$$

$$= -\hbar^2 \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2} \cdot \underbrace{\frac{2}{L} \int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi x}{L}}_{= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2}$$

(4)

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) - L^2 \frac{1}{4}}$$

$$= \underline{\underline{L \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} - 0} = \underline{\underline{\frac{\pi \hbar}{L}}}$$

$$(e) \quad \Delta x \Delta p = L \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}} \frac{\pi \hbar}{L} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}} \cdot \hbar}}$$

$$\approx \underline{\underline{0.568 \hbar}}$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon sier at $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$
 Vi ser at den er tilfredsstillt.

Oppgave 2.

(a) Krafta gitt av Newtons 2. lov:

$$F_x = m a_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \left(-\frac{b}{m} \right) v_x = -b v_x$$

Gjenkjenner dette som en vanlig type friksjonskraft ($|F|$ prop. med $|v|$, F og v motsatt retning (med $b > 0$)). b er da simpelthen koeffisienten som gir et mål på friksjonen (større b gir større friksjon for same v).

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x(t) &= \int_0^t v_x(t') dt' \quad (\text{dvs. } x(0)=0) \\
 &= v_0 \int_0^t e^{-bt'/m} dt' = -\frac{m}{b} v_0 (e^{-bt/m} - 1) \\
 &= \underline{\underline{\frac{mv_0}{b} [1 - e^{-bt/m}]}}
 \end{aligned}$$

Partikkelen trengjer inn kl posisjoner
 $x(t=\infty) = mv_0/b$

Oppgave 3.

(a) E_k er ikkje bevart i kollisjonen fordi den er uelastisk. $\vec{p}$ er bevart fordi det virkar ingen ytre netto krefter på skivene.

(b) Bevaring av bevegelsesmengd gir

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad (\text{forkorta felles masse } m)$$

$$\text{Kvadrering gir } v_1^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$$

Endringer i kinetisk translasjonsenergi er

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k^{\text{trans}} &= E_k^{\text{trans}} (\text{etter}) - E_k^{\text{trans}} (\text{før}) \\
 &= \left[\frac{1}{2} m (v_1')^2 + \frac{1}{2} m (v_2')^2 \right] - \frac{1}{2} m v_1^2 \\
 &= -m \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = \underline{\underline{-m v_1' v_2' \cos \theta}}
 \end{aligned}$$

(6)

som kan være positiv, negativ, eller null avh. av θ . Siden E_k minsker i kollisjonen (dvs. $\Delta E_k < 0$) er vi avhengig av kinetisk rotasjonsenergi E_k^{rot} for kollisjonen for at kinetisk translasjonsenergi skal kunne auke.
 $(E_k = E_k^{\text{trans}} + E_k^{\text{rot}})$

Oppgave 4.

- (a) I sklifasen virker en kinetisk friksjonskraft mot bevegelsen, med størrelse $F_f = \mu_k N = \mu_k mg$ (N er normalkrafta). Newtons 2. lov gir akselerasjonen

$$a = - \frac{F_f}{m} = - \mu_k g$$

Hastigheten: $v \stackrel{a \text{ konstant}}{=} v_0 + at = v_0 - \mu_k g t$

- (b) Verken tyngda eller normalkrafta gir kraftmoment. Newtons 2. lov for rotasjon gir

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{F_f r}{I} = \frac{\mu_k mg r}{\frac{2}{5} m r^2} = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r}$$

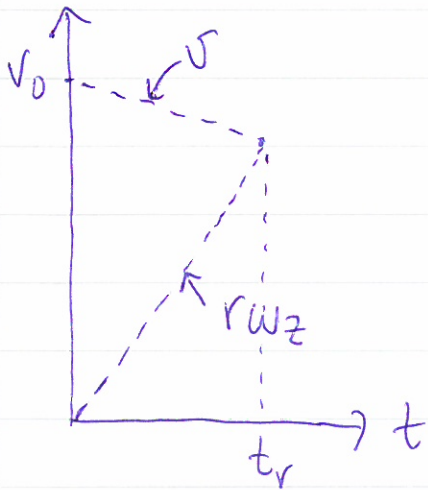
Rotasjons-hastigheten: $\omega_z \stackrel{\alpha_z \text{ konstant}}{=} \omega_0 + \alpha_z t$
 $= 0 + \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t$ ↑ initialrotasjons-hast. = 0 her

(c) 3 sklifasen ($0 < t < t_r$):

$$v = v_0 - \mu_k g t$$

$$r\omega_z = \left(\frac{5}{2}\right) \mu_k g t$$

Skjematisk:



Reinulling oppstår
ved lida t_r der

$$v = r\omega_z \quad (\text{nullenilåret})$$

Set inn: $v_0 - \mu_k g t_r = \frac{5}{2} \mu_k g t_r$

$$\Rightarrow t_r = \frac{v_0}{\left(\frac{5}{2} + 1\right) \mu_k g} = \underline{\underline{\frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu_k g}}}$$

$$x_r = x_0 + v_0 t_r + \frac{1}{2} a t_r^2$$

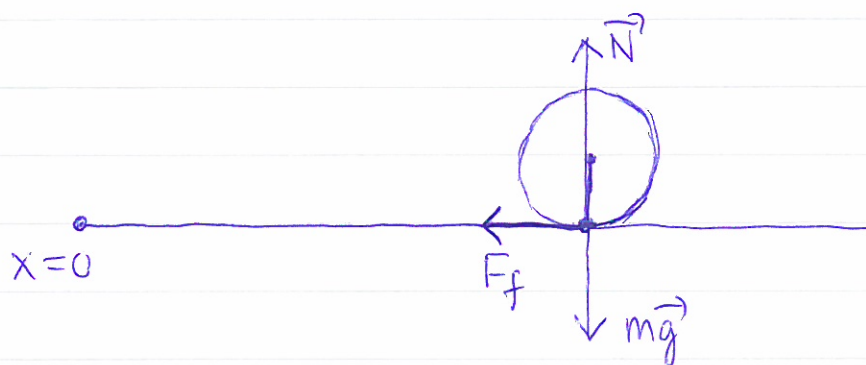
$$= 0 + v_0 \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu_k g} + \frac{1}{2} (-\mu_k g) \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{v_0^2}{(\mu_k g)^2}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{49}\right) \frac{v_0^2}{\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu_k g}}}$$

$$v_r = v_0 - \mu_k g t_r = v_0 - \mu_k g \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{5}{7} v_0}}$$

(Alternativt kunne en ~~t.d.~~ ha funne v_r først og
så brukt $v_r^2 - v_0^2 = 2ax_r$ for å funne x_r .)

(d)



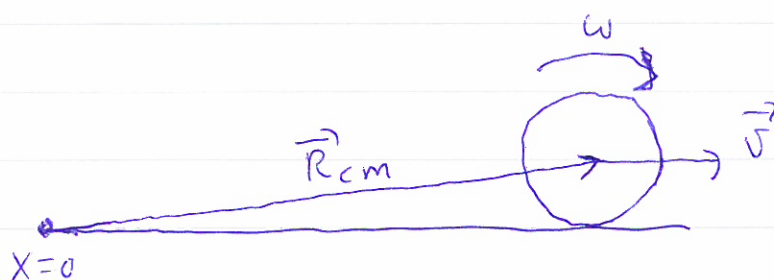
Kreftene på kula er $\vec{N}$ (normalkraft), $m\vec{g}$ (tyngdekraft) og (i skrefasen) friksjonskrafta $\vec{F}_f$.

Bidraga frå $\vec{N}$ og $m\vec{g}$ til kraftmomentet $\vec{\tau}$ om $x=0$ kansellerer fordi $\vec{N} = -m\vec{g}$ (sidan null akselerasjon i vertikal retning) og dei to kreftene har same arm.

Bidraget frå $\vec{F}_f$ til $\vec{\tau}$ er ~~og~~ null fordi armen til $\vec{F}_f$ er null. Sidan avstandsvektoren fra ref pkt. til angrepspkt er $\parallel$ med $\vec{F}_f$. Dermed er $\vec{\tau} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ bevart}$$

(e)



(9)

$$\vec{L} = \vec{R}_{cm} \times m\vec{v} + I\vec{\omega} \quad (I = \frac{2}{5}mr^2)$$

peikar langs $\hat{z}$

$$\text{Spinbevaring} \Rightarrow L_z(0) = L_z(x)$$

$$L_z(0) = rmv_0 + 0 = rmv_0$$

$$L_z(x) = rmv + I\omega$$

$$\Rightarrow rmv_0 = rmv + I\omega$$

v_r kan finnast vha. relle vilkåret
 $v = r\omega$

$$\Rightarrow rmv_0 = rmv_r + I \frac{v_r}{r}$$

$$= rmv_r + \frac{2}{5}mr^2 \frac{v_r}{r} = \frac{7}{5}mv_r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_r = \frac{5}{7}v_0}}$$

Oppg. 5

- (a) Bruker bevaring av energi. Tyngdepunktet har falle en høgd $h = L/2$ og potensiell energi mgh er overført til kinetisk rotasjonsenergi $\frac{1}{2} I \omega^2$

$$\Rightarrow Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3g}{L}}}}$$

- (b) Kraftmomentet er gitt av tyngdekraften med arm $L/2$. Dermed (Newtons 2. lov for rotasjon)

$$\tau = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg \cdot L/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \underline{\underline{\frac{3g}{2L}}}$$