

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystemer

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad

Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 7. juni

Eksamenstid (fra-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Annen informasjon:

Eksamenen har 3 oppgaver. Noen formler kan finnes på siste side.

Oppgavene ble utarbeidet av John Ove Fjærestad og drøftet med Jens Oluf Andersen.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (inkludert forside og vedlegg): 7

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1

Se på Hamiltonoperatoren

$$H = \varepsilon(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \Delta(a_1^\dagger a_2^\dagger + \text{h.c.}) \quad (1)$$

der $\varepsilon > 0$ og $\Delta > 0$ er parametre, og a_1 og a_2 er fermioniske operatorer som tilfredsstiller kanoniske antikommuteringsrelasjoner. Dvs. $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), og alle andre antikommutatorer som involverer disse operatorene er null.

For å skrive Hamiltonoperatoren på diagonal form transformerer vi til et nytt sett c_1, c_2 av fermioniske operatorer. Transformasjonen er

$$a_1 = uc_1 - vc_2^\dagger, \quad (2)$$

$$a_2 = uc_2 + vc_1^\dagger, \quad (3)$$

der u og v er reelle tall.

(a) Bruk kravet om at c -operatorene også skal tilfredsstille kanoniske antikommuteringsrelasjoner til å vise at

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (4)$$

(for å vise dette, er det tilstrekkelig at du regner ut kun én utvalgt antikommutator). Dette resultatet kan brukes til å skrive $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$, der θ er en vinkel.

(b) Vis at ved å velge θ slik at

$$\tan 2\theta = \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (5)$$

blir leddet proporsjonalt med $(c_1^\dagger c_2^\dagger + \text{h.c.})$ i H lik null.

(c) Vis at med dette valget kan H skrives som

$$H = F(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) + G. \quad (6)$$

Gi uttrykkene for F og G som funksjoner av ε og Δ (velg den positive løsningen for $\cos 2\theta$).

(d) Bestem energien og degenerasjonen av hvert energinivå til H . Anta her at den eneste begrensningen på partikkeltall kommer fra Pauliprinsippet, dvs. bruk det store kanoniske ensemble.

Oppgave 2

Se på en ferromagnet på et kvadratisk gitter. Hamiltonoperatoren er

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} [J_{\perp} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + J_z S_i^z S_j^z]. \quad (7)$$

Her er $J_z > 0$ og vi antar at $0 \leq J_{\perp} \leq J_z$. Vi antar også at kun nærmeste-nabo gitterpunkt vekselvirker med hverandre, slik at summen er over alle par av nærmeste-nabo gitterpunkter (hvert slikt par telles kun en gang).

(a) Bruk spinnbølgeteori til å regne ut grunntilstandsenergien E_0 og magnon-dispersjonen $\omega_{\mathbf{k}}$ (i denne analysen skal du neglisjere ledd som beskriver vekselvirkninger mellom magnoner).

(b) Vis at for små $|\mathbf{k}|$ kan magnon-dispersjonen uttrykkes vha. to parametre Δ og m som

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx \Delta + \frac{k^2}{2m} \quad (8)$$

og finn uttrykk for Δ og m . Her er Δ den lavere grensen av magnon-energien og kalles energigapet, mens m kan tolkes som en masse (merk at vi har satt $\hbar = 1$; med $\hbar$ inkludert sees det m -avhengige leddet å være av velkjent kinetisk-energi form $\hbar^2 k^2 / (2m)$).

(c) Hva er verdien til Δ i grensen $J_{\perp} \rightarrow J_z$? Er dette hva du ville forvente i lys av Goldstones teorem? Forklar.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal du se på elektroner i et uordnet potensial, som diskutert i forelesningene. Hamiltonoperatoren er

$$H = H_0 + V \quad (9)$$

der

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} \quad (10)$$

(som i forelesningene dropper vi spinn-indeksen) og vekselvirkningene mellom elektronene og urenheterne er beskrevet av

$$V = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} U(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}}, \quad (11)$$

der

$$U(\mathbf{k}) = \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\rho(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j}, \quad (13)$$

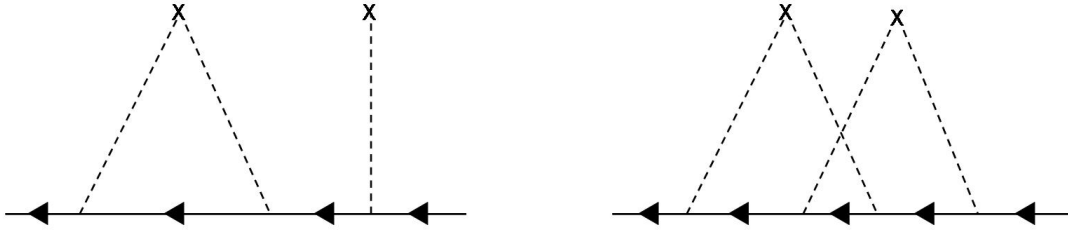
der Ω er systemets volum, $U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j)$ er potensialet et elektron med posisjon $\mathbf{r}$ føler pga. urenheter nr. j med posisjon $\mathbf{R}_j$, og N er antallet urenheter. I forelesningene diskuterte vi en perturbasjonsutvikling for én-partikkel Matsubara Green-funksjonen $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; ip_m)$ der p_m er en fermionisk Matsubara-frekvens. Ved å midle over posisjonene til urenheterne, ble den resulterende Green-funksjonen $\mathbf{k}$ -diagonal: $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; ip_m) = \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$. Vi representerte hvert ledd i perturbasjonsutviklingen for $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m)$ med et Feynman-diagram og etablerte Feynman-reglene for å oversette mellom diagrammene og deres assosierte matematiske uttrykk.

(a) Anta at du blir presentert et vilkårlig Feynman-diagram i perturbasjonsutviklingen for $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m)$. Hvordan ville du identifisere

1. dets orden n (med hensyn paa urenhetspotensialet).
2. dets avhengighet av tettheten av urenheter $n_{\text{imp}} = N/\Omega$.

(b) Se på de to Feynman-diagrammene under som opptrer i perturbasjonsutviklingen for $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m)$.

For hvert diagram:



1. Gi dets matematiske uttrykk (prøv ikke å evaluere noen summer over bølgevektorer).
2. Avgjør om diagrammet er redusibelt eller irreducibelt (grunngi konklusjonen din). Dersom diagrammet er irreducibelt, tegn det assosierte selvennergi-diagrammet og gi dets matematiske uttrykk.

(c) I forelesningene viste vi at $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m)$ kan uttrykkes som

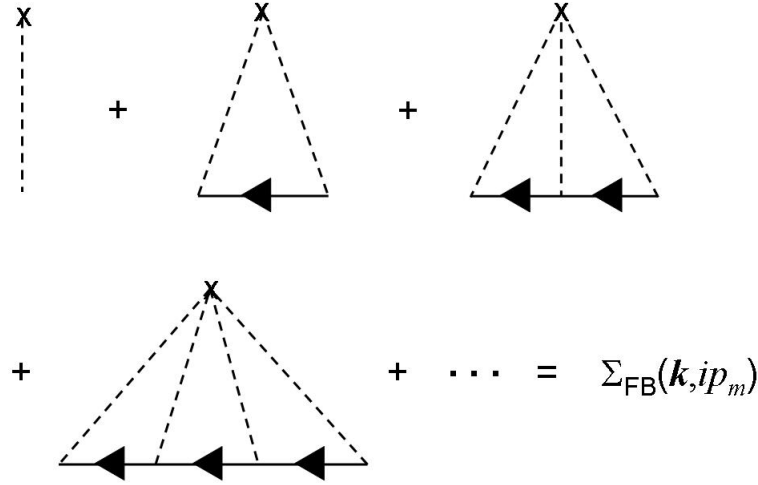
$$\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m) = \frac{1}{(\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{k}, ip_m))^{-1} - \Sigma(\mathbf{k}, ip_m)} = \frac{1}{ip_m - \xi_{\mathbf{k}} - \Sigma(\mathbf{k}, ip_m)} \quad (14)$$

der $\Sigma(\mathbf{k}, ip_m)$ er selvennergien, definert som summen av alle selvennergi-diagrammer. Vi fant et approksimativt resultat for $\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, ip_m)$ ved å approksimere selvennergien $\Sigma(\mathbf{k}, ip_m)$ som

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ | \\ \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \text{X} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \leftarrow \end{array} = \Sigma_{1B}(\mathbf{k}, ip_m)$$

Dette kalles “første Born-approksimasjon,” som er grunnen til at vi her har definert summen av disse to selvennergi-diagrammene som $\Sigma_{1B}(\mathbf{k}, ip_m)$. I det følgende vil vi studere en annen approksimasjon for selvennergien, gitt av den uendelige summen av *alle* selvennergi-diagrammer med *ett* urenhetskryss (se figuren under).

Dette kalles “den fulle Born-approksimasjonen,” som er grunnen til at vi har definert denne summen som $\Sigma_{FB}(\mathbf{k}, ip_m)$. Merk at de to første leddene i denne uendelige summen utgjør “første Born-approksimasjon” $\Sigma_{1B}(\mathbf{k}, ip_m)$.



1. Forklar under hvilke fysiske betingelser (spesifisert av urenhets tettheten n_{imp} og styrken til spredningspotensialet $U(\mathbf{r})$) du forventer at Σ_{IB} er en god approksimasjon til den totale selvenergien. Gjør det samme for Σ_{FB} . Begrunn svarene dine.
2. Gi det matematiske uttrykket for det n 'te diagrammet i $\Sigma_{\text{FB}}(\mathbf{k}, ip_m)$, dvs. diagrammet med n vekselvirkningslinjer der n er et vilkårlig positivt heltall. (Det kan være til hjelp å først se på uttrykkene for de første få diagrammene i $\Sigma_{\text{FB}}(\mathbf{k}, ip_m)$ før du ser på tilfellet for en generell n).
3. Anta at urenhetspotensialet $U(\mathbf{r})$ har svært kort rekkevidde, slik at dets Fourier-transform $U(\mathbf{k})$ kan approksimeres med en konstant U , dvs. $U(\mathbf{k}) \equiv U$ for alle $\mathbf{k}$. Vis at i dette tilfellet er $\Sigma_{\text{FB}}(\mathbf{k}, ip_m)$ gitt som

$$\Sigma_{\text{FB}}(\mathbf{k}, ip_m) = \frac{NU}{1 - U \sum_{\mathbf{k}_1} \mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1, ip_m)} \equiv \Sigma_{\text{FB}}(ip_m). \quad (15)$$

4. I forelesningene fant vi at for et urenhetspotensial med svært kort rekkevidde er det andre diagrammet i Σ_{IB} og Σ_{FB} i figurene over gitt som

$$-\frac{i}{2\tau_{\text{IB}}} \text{sgn}(p_m) \quad \text{der} \quad \frac{1}{\tau_{\text{IB}}} = 2\pi n_{\text{imp}} u^2 D(0). \quad (16)$$

(I forelesningene ble τ_{IB} bare kalt τ .) Her er $u = U\Omega$ og $D(0)$ er en tilstandstetthetsfaktor hvis presise definisjon ikke er viktig her. Bruk resultatet (16) til å vise at

$$\text{Im} \Sigma_{\text{FB}}(ip_m) = -\frac{1}{2\tau_{\text{FB}}} \text{sgn}(p_m) \quad (17)$$

og gi et uttrykk for parameteren τ_{FB} .

Formler

Trigonometriske identiteter:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (18)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad (19)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad (20)$$

Spinn-vekselvirkninger:

$$S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y = \frac{1}{2}(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+)$$

Holstein-Primakoff-representasjonen:

$$\begin{aligned} S_j^+ &= \sqrt{2S - n_j} a_j, \\ S_j^- &= a_j^\dagger \sqrt{2S - n_j}, \\ S_j^z &= S - n_j, \end{aligned}$$

der $n_j \equiv a_j^\dagger a_j$

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} a_{\mathbf{k}}$$

Gittersum:

$$\frac{1}{N} \sum_j e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

Geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$