NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for fysikk

Eksamen TFY 4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystem, våren 2012

Faglærar: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad
Institutt for fysikk
Telefon: 73593448/97940036

Mandag 4. juni 2012
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:

Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Eksamenen har 3 oppgåver, med deloppgåver (a), (b), ... Alle deloppgåver har same vekt. Det er 6 sider totalt. Nokre nyttige formlar er oppgitt på siste side.

Oppgåve 1

(a) Dirac-likninga er (med $\hbar = c = 1$)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{der } H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m.$$

Beskriv kort kvifor Dirac søkte etter ei likning på denne forma.

(b) Det viser seg at ei likning på denne forma også kjem opp i låg-energi-beskrivelsen av nokre 1-dimensjonale system i kondenserte mediers fysikk. I resten av denne oppgåva skal vi difor sjå på Dirac-likninga i 1 romdimensjon. Det er da berre éi α-matrise, α_1. Bruk same type argumentasjon som for det 3-dimensjonale tilfellet til å vise at i det 1-dimensjonale tilfellet får ein betingelsane

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \beta^2 = 1, \\ \alpha_1\beta + \beta\alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

(c) Ein gyldig representasjon for β og α_1 som tilfredsstiller desse betingelsane er $\beta = \sigma_1$ og $\alpha_1 = \sigma_3$. Ved å bruke denne Pauli-matrise-representasjonen, vis at eigenverdiane til H er gitt som

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

der p er impuls-eigenverdien.

(d) Uttrykt vha. γ-matriser ($\gamma^0 \equiv \beta$ og $\gamma^1 \equiv \beta\alpha_1$) blir Dirac-likninga

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

der μ går over verdiane 0 og 1. Utlei denne likninga fra Lagrange-tettleiken

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

der $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

(e) Med våre valgde representasjonar for β og α_1 blir γ-matrisene $\gamma^0 = \sigma_1$ og $\gamma^1 = -i\sigma_2$. Sjå no på matrisa $\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1$, som vi bruker til å definere ein *kiral transformasjon* som

$$\psi \to e^{i\theta\gamma^5}\psi$$

der θ er ein vinkelparameter. Vis at under denne transformasjonen så transformerer $\bar{\psi}$ som

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\, e^{i\theta\gamma^5},$$

og vis vidare at to-komponent vektoren

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{pmatrix}$$

transformerer som ein rotasjon,

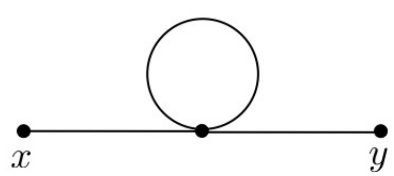
$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}\psi \\ i\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{pmatrix}$$

der rotasjonsvinkelen $\phi = \phi(\theta)$. Finn verdiane av θ som gjer denne to-komponent vektoren invariant. (Desse resultata har ei naturleg tolking i kondenserte-mediers-konteksten som vi nemnde i introduksjonen, men vi går ikkje inn på det her.)

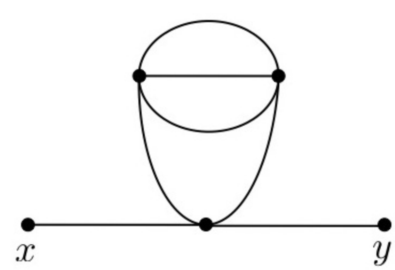
Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi sjå på φ^4 kvantefeltteori. Deloppgåvene (a) og (b) er om (posisjonsroms) Feynman-diagram for 2-punkt-funksjonen $\langle\Omega|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|\Omega\rangle \equiv D_F(x-y)_{\text{int}}$ i φ^4 teori. Deloppgåve (c) er om (impulsroms) Feynman-diagram for Fourier-transformen $\tilde{D}_F(p)_{\text{int}}$ av 2-punkt-funksjonen.

(a) Ved å bruke Feynman-reglane for posisjons-roms Feynman-diagram, skriv ned uttrykka for dei to Feynman-diagramma (i)-(ii) under (du kan la symmetrifaktoren S vere uspesifisert).

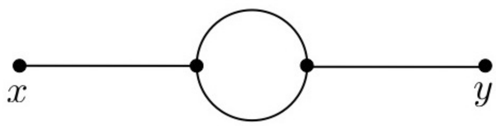


(i)

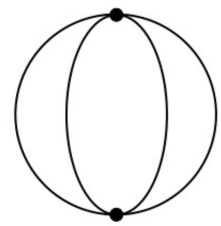


(ii)

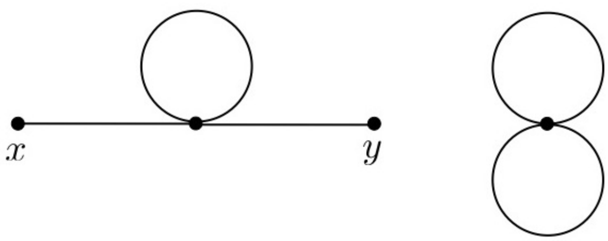
(b) Etter nokre forenklingar kan perturbasjonsutviklinga for 2-punkt-funksjonen skrivast skjematisk som ein sum over Feynman-diagram, dvs. $D_F(x-y)_{\text{int}} = \sum_i A_i$, der A_i representerer eit Feynman-diagram i denne utviklinga. Blant dei 4 diagramma (i)-(iv) under, er minst eitt av dei ikkje av den gyldige typen A_i. Identifiser diagrammet/diagramma som er ugyldige, og dersom eit diagram er ugyldig, skriv kort kvifor.



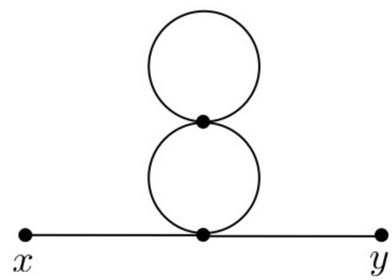
(i)



(ii)

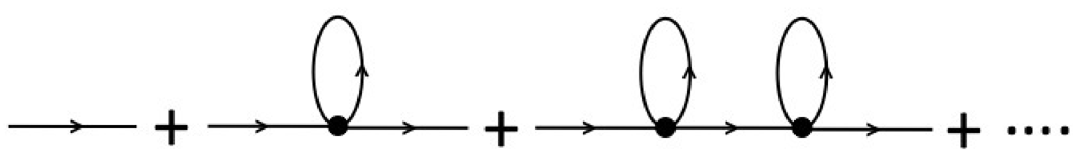


(iii)



(iv)

(c) Sjå på følgjande approksimasjon for $\tilde{D}_F(p)_{\text{int}}$:



Ved å bruke Feynman-reglane for impulsroms Feynman-diagram, finn eit uttrykk for diagrammet med n løkker i denne rekkja. [Hint: Det kan vere lurt å starte med å finne uttrykk for diagramma med 0, 1, og 2 løkker, og så evt. sjå på diagram med fleire løkker inntil du ser eit mønster. Merk at symmetrifaktoren for diagrammet med n løkker er 2^n.] Bruk dette til å finne eit uttrykk for $\tilde{D}_F(p)_{\text{int}}$ i denne approksimasjonen. (Ikkje prøv å rekne ut ikkje-trivielle integral.)

Oppgåve 3

Sjå på ein "tight-binding" modell av ikkje-vekselvirkande elektron i ein eindimensjonal krystall med N gitterpunkt og periodiske grensebetingelsar. Hamilton-operatoren er

$$H = -t \sum_{j,\sigma} (c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + \text{h.c.}) + t' \sum_{j,\sigma} (c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+2,\sigma} + \text{h.c.}).$$

Her kreerer (annihilerer) $c_{j,\sigma}^\dagger$ ($c_{j,\sigma}$) eit elektron med spinn-projeksjon σ ($= \pm 1/2$) på gitterpunkt j. Det første (andre) leddet i H beskriv hopping mellom nærmaste-nabo (nest-nærmaste-nabo) gitterpunkt. Hoppeamplitudane for desse ledda er hhv. $-t$ og t'.

(a) Vis at H kan skrivast på diagonal form som

$$H = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$$

der $c_{k,\sigma}^\dagger$ ($c_{k,\sigma}$) kreerer (annihilerer) eit elektron med bølgjevektor k og spinn-projeksjon σ, k-summen er over 1. Brillouinsone $[-\pi, \pi\rangle$, og

$$\varepsilon_k = -2t \cos k + 2t' \cos 2k$$

(bølgjevektorane er dimensjonslause fordi vi har sett gitteravstanden til 1).

Fra no av, anta at t er positiv og at systemet er *halv-fylt*, dvs. antalet elektron N_e er lik antalet gitterpunkt N. Vi skal sjå på grunntilstanden til Hamilton-operatoren for forskjellige ikkje-negative verdiar av t'. For å vere presise definerer vi her ein Fermi bølgjevektor i eit ein-dimensjonalt system som ein bølgjevektor som skil ein region av okkuperte bølgjevektorar fra ein region av uokkuperte bølgjevektorar i grunntilstanden til systemet.

(b) Sjå først på tilfellet $t' = 0$. Skissér ε_k. Kva er verdiane av Fermi bølgjevektorane og dei okkuperte bølgjevektorane?

(c) Sjå deretter på tilfellet at t' er positiv og definer forholdet $r = t'/t$ (> 0). Vis at det finst ein kritisk verdi r_c slik at for $r < r_c$ har systemet to Fermi bølgjevektorar mens for $r > r_c$ har systemet fire Fermi bølgjevektorar. Utlei verdien av r_c og finn Fermi-energien for $r = r_c$.

Formlar

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{i,j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\frac{1}{N} \sum_j e^{i(k-k')j} = \delta_{k,k'}$$