

TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 1

Oppgave 1.

Fra $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ får vi $d\vec{v} = \vec{a} dt$. (Her betyr $\vec{a}$ i det generelle tilfellet $\vec{a}(t)$, en funksjon av t , selv om vi ofte ikke eksplisitt indikerer denne tidsavhengigheten.) Vi integrerer denne ligningen fra tiden t_0 , da hastigheten er $\vec{v}_0$, til tiden t_1 , da hastigheten er $\vec{v}_1$. Siden vi her skal se på spesialtilfellet at akselerasjonen $\vec{a}(t)$ er en konstant (som vi for enkelhets skyld også kaller $\vec{a}$) kan den tas utenfor integrasjonen:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt = \vec{a} \int_{t_0}^{t_1} dt \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \vec{a}(t_1 - t_0) \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0),$$

som var det første resultatet som skulle vises. Dernest bruker vi $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, som gir $d\vec{r} = \vec{v} dt$, med $\vec{v} = \vec{v}(t)$ (jf. kommentar over). Vi integrerer igjen fra t_0 til t_1 , med tilhørende posisjoner $\vec{r}_0$ og $\vec{r}_1$:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)] = (\vec{v}_0 - \vec{a}t_0) \int_{t_0}^{t_1} dt + \vec{a} \int_{t_0}^{t_1} dt t.$$

Ved å utføre integrasjonene på begge sider får vi

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (\vec{v}_0 - \vec{a}t_0)(t_1 - t_0) + \vec{a} \frac{1}{2}(t_1^2 - t_0^2).$$

Dette kan omskrives til

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_1 - t_0)^2, \quad \text{altså} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2,$$

som skulle vises. Til slutt kan vi se på følgende to uttrykk:

$$\begin{aligned} 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) &= 2\vec{a} \cdot \left[\vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \right] = \vec{a}(t - t_0) \cdot [2\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)], \\ \vec{v}^2 - \vec{v}_0^2 &= (\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v} + \vec{v}_0) = \vec{a}(t - t_0) \cdot [2\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Vi ser at de to høyresidene er like, dvs.

$$\vec{v}^2 - \vec{v}_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Oppgave 2.

La oss betegne bevegelsesretningen som x -retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonnen. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x -retningen, har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonslikningene

$$v(t) = v_0 + at; \quad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to ligningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \Rightarrow 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne "tidløse" konst.-aksel.-likningen direkte.) Inntrengningsdybden x_i ved tida t_i er det punktet der $v(t_i) = 0$,

$$x_i = \frac{v_0^2}{-2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9,8} \text{ m} = \underline{1,6 \text{ m}}.$$

Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = \frac{v_0 - 0}{-a} = \frac{40}{50 \cdot 9,8} \text{ s} = \underline{0,082 \text{ s}}.$$

Oppgave 3.

a. Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow -\frac{dv}{v^2} = k dt$$

Integrerer fra tiden $t_0 = 0$ da hastigheten er v_0 , til tiden t_1 da hastigheten er v_1 :

$$-\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^2} = k \int_0^{t_1} dt \Rightarrow \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} = k(t_1 - 0) \Rightarrow \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}.$$

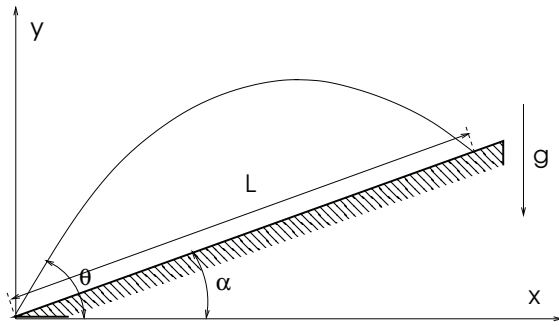
b. Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + kv_0 T} = \frac{1}{2} v_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3,0 \cdot 1,50} \text{ s} = 0,22 \text{ s}.$$

Ved start er $x = 0$ og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = dx/dt$, eller $dx = vdt$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 T) = \frac{1}{3,0 \text{ m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0,23 \text{ m}}.$$

Oppgave 4.



a. Situasjonen er skissert i figuren til venstre.

b. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \theta & v_y(0) &= v_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

I x -retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$.

I y -retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b har den beveget seg $x(t_b)$ i x -retning og $y(t_b)$ i y -retning. Da må ifølge figuren $y(t_b)/x(t_b) = \tan \alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin \theta t_b - \frac{1}{2}gt_b^2}{v_0 \cos \theta t_b} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha).$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_b)}{\cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \theta \cdot t_b}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha)}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{g \cdot \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \tan \alpha) \quad \text{Q.E.D.}$$

c. Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp. θ og sette deriverte lik null.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \alpha). \end{aligned}$$

$\frac{dL}{d\theta} \equiv 0$ og løst mhp. θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_{\text{maks}} = -\cot \alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{maks}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_{\text{maks}} = 45^\circ$, i tråd med erfaringer.

Oppgave 5.

Vi finner tiden t_t da prosjektilet når toppunktet fra betingelsen $v_y(t_t) = 0$. Siden $v_y(t) = v_y(0) + a_y t$ med $a_y = -g$ og $v_y(0) = v_0 \sin \theta$ gir dette ligningen

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_t \quad \Rightarrow \quad t_t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}.$$

Posisjonene i x - og y -retningen er da

$$x_t = v_x(0)t_t + \frac{1}{2}a_x t_t^2 = (v_0 \cos \theta) \frac{v_0 \sin \theta}{g} + 0 = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta,$$

$$y_t = v_y(0)t_t + \frac{1}{2}a_y t_t^2 = (v_0 \sin \theta) \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\theta).$$

Definér

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_0^2}{2g}, \\ b &= \frac{v_0^2}{4g} \quad \left(= \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

Da ser vi fra uttrykkene for x_t og y_t at vi kan vi skrive

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{x_t}{a}, \\ \cos 2\theta &= -\frac{y_t - b}{b} \end{aligned}$$

Identiteten $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$ gir da

$$\frac{x_t^2}{a^2} + \frac{(y_t - b)^2}{b^2} = 1$$

som er ellipseligningen gitt i oppgaveteksten, med $X = 0$ og $Y = b$. Det er lett å sjekke at $\theta = 0$ og $\theta = 180^\circ$ gir bunnpunktet $(0, 0)$ i ellipsen, $\theta = 45^\circ$ og 135° gir hhv. punktene $(\pm a, b)$ med max horisontal avstand a fra utskytningspunktet, og $\theta = 90^\circ$ gir punktet $(0, 2b)$ med max vertikal avstand $2b = a$ fra utskytningspunktet.

(At toppunktene i prosjektilbaner sveiper ut en ellipse når utskytningsvinkelen varieres, ser ut til å ha vært et heller lite kjent faktum inntil ganske nylig; se evt. diskusjonen i <http://arxiv.org/abs/physics/0402020> fra 2004 der denne egenskapen ble påpekt.)