

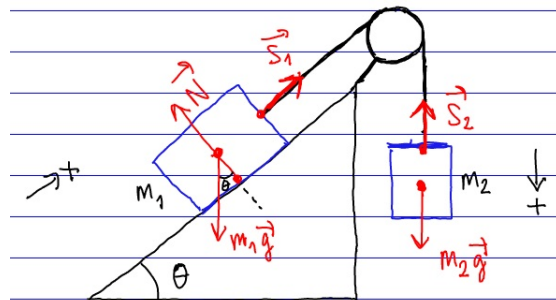
TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 2

Oppgave 1.

a. Legemene beveger seg sammen $\Rightarrow a_1 = a_2 \equiv a$. Masseløs snor, null friksjon på snor $\Rightarrow S_1 = S_2 \equiv S$. Newtons 2. lov for legeme 2 i vertikalretningen (valgt positiv nedover) gir

$$m_2 g - S = m_2 a \quad \Rightarrow \quad S = m_2 (g - a). \quad (1)$$



Videre gir Newtons 2. lov for legeme 1 i retningen langs skråplanet (valgt positiv oppover)

$$S - m_1 g \sin \theta = m_1 a. \quad (2)$$

Løsning av disse to ligningene for de to ukjente a og S gir

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_1 + m_2} g, \quad (3)$$

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \theta). \quad (4)$$

Sjekk av spesialtilfeller: For $\theta = 0$ reduseres disse uttrykkene til svaret for Eksempel 5.12 i YF. For $\theta = 90^\circ$ får vi $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$, dvs. retningen av akselerasjonen bestemmes kun av masseforholdet, og snordraget er maksimalt.

b. Ser fra uttrykket for a at fortegnet til a (som gir retningen til akselerasjonen) er lik fortegnet til $m_2 - m_1 \sin \theta$, siden alle andre faktorer i a er positive. Får dermed at for $\theta < \arcsin(m_2/m_1)$ blir $a > 0$, dvs. legeme 1 akselererer oppover skråplanet mens legeme 2 akselererer nedover, mens for $\theta > \arcsin(m_2/m_1)$ blir $a < 0$, dvs. legeme 1 akselererer nedover skråplanet mens legeme 2 akselererer oppover. Dersom $\theta = \arcsin(m_2/m_1)$ blir $a = 0$.

Oppgave 2.

a. Vi har statisk likevekt, og Newtons 2. lov gir at

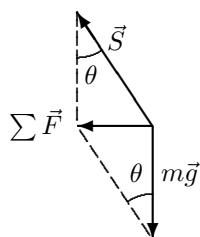
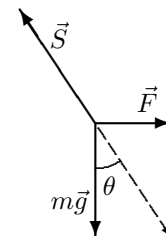
$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} = \vec{0}, \quad (5)$$

dvs. $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\vec{S}$, som peker langs stanga. Dermed må også resultanten av $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Komponentform av likn. (5):

$$S_y = S \cos \theta = mg \quad S_x = S \sin \theta = F. \quad (6)$$

Dette gir

$$\tan \theta = \frac{F}{mg} \quad \Rightarrow \quad F = mg \tan \theta = 0,150 \cdot 9,8 \cdot (\tan 25^\circ) N = 0,69 N. \quad (7)$$



b. Summen av krefter er lik (sentrifetal)akselererende kraft (Newtons 2. lov):

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}_c, \quad \text{hvor } a_c = |\vec{a}_c| = v^2/r.$$

Dvs. $\vec{S} + m\vec{g}$ går i radiell retning som vist i figuren til venstre. Radien $r = L \sin \theta$. Komponentform:

$$S_x = S \sin \theta = m a_c. \quad (8)$$

$$S_y = S \cos \theta = mg \quad (9)$$

Vi regner ut sentrifetalakselerasjonen:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \sin \theta. \quad (10)$$

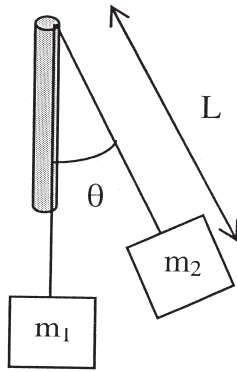
Likn. (8) dividert med likn. (9) gir

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a_c}{g} = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \sin \theta. \quad (11)$$

$\sin \theta$ forkortes bort og vi får

$$\theta = \arccos \left(\frac{gT^2}{4\pi^2 L} \right) = \arccos \left(\frac{9,81 \cdot (1,10)^2}{4\pi^2 \cdot 0,50} \right) = 53^\circ. \quad (12)$$

Oppgave 3.



a. Forholdene for m_2 er som m i oppgaven ovenfor, og kunne henvist til likningene der. Men gjør her en uavhengig analyse: Massen m_1 skal være i ro, og derved er snordraget bestemt som $S = m_1 g$. På massen m_2 virker både vertikale og horisontale krefter. Vertikalt må snordraget utbalansere tyngden av m_2 . Dette gir likningen $S \cos \theta = m_2 g$, og derved er θ gitt av

$$\cos \theta = \frac{m_2 g}{S} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}.$$

b. Horisontalt må snordraget sørge for den sentripetalkrafta som skal til for å holde m_2 i en sirkelbane med radius $r = L \sin \theta$. Dette gir

$$S \sin \theta = m_2 \omega^2 L \sin \theta = m_2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 L \sin \theta.$$

Vi løser for L og $S = m_1 g$:

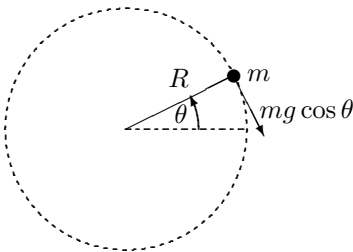
$$L = \frac{S}{m_2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = \frac{m_1 g T^2}{m_2 4\pi^2}.$$

c. Med de oppgitte tallene finner vi at

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{m_2}{m_1} = \frac{2,0}{4,0} \Rightarrow \theta = 60^\circ. \\ L &= \frac{4,0}{2,00} \cdot \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,00 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 0,497 \text{ m} = \underline{0,50 \text{ m}}. \end{aligned}$$

d. - Hvis lengden er større enn likevektslengden, vil snordraget bli for stort, m_1 dras oppover, og lengden øker ytterligere. Hvis lengden er mindre enn den funne likevektsverdien for L , er snordraget for lite, m_2 dras nærmere toppen av røret mens m_1 beveger seg nedover, og lengden minker. Den dynamiske "likevekten" er altså ikke påfallende stabil. Tvertimot!

Oppgave 4.



a. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangensielt til sirkelbuen, regnet positiv i positiv θ -retning: $-mg \cos \theta$. Akselerasjonen i tangensialretning er $a_t = \frac{dv}{dt}$. Derved får Newtons 2. lov formen

$$-mg \cos \theta = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g \cos \theta,$$

som vi skulle vise.

Kjerneregelen for $v(\theta(t))$ gir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{v}{R}.$$

Derved har vi funnet følgende en differensiallikning for $v(\theta)$:

$$\underline{v dv = -gR \cos \theta d\theta}.$$

b. Løser ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $v = v_0$ til slutttilstand $\theta = \theta_1$; $v = v_1$:

$$\int_{v_0}^{v_1} v dv = -gR \int_0^{\theta_1} \cos \theta d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = -gR \cdot \sin \theta_1 \Rightarrow \underline{v^2 = v_0^2 - 2gR \sin \theta}.$$

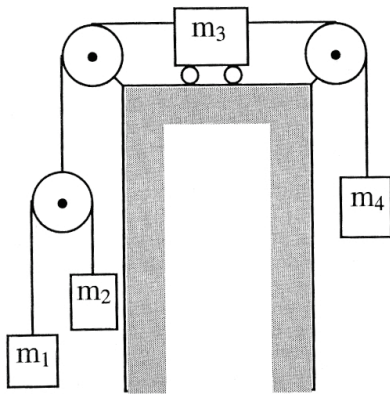
c. Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt innover mot sirkelens sentrum, gi den sentripetalkrafta som holder steinen i sirkelbane:

$$S + mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R} = m \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g \sin \theta \right) \Rightarrow \underline{S(\theta) = m \left(\frac{v_0^2}{R} - 3g \sin \theta \right)}.$$

Av dette kan vi slutte at $S = S_{\max}$ når $\sin \theta = -1$, det vil si når $\theta = \frac{3}{2}\pi \pm n \cdot 2\pi$, der n er et heltall. Dette er helt i tråd med vanlig sunn fornuft: Strekket i snora blir størst når massen er rett under sirkelens sentrum.

Tilsvarende kan vi slutte at dersom snora hele tiden skal være strukket, må $S_{\min} > 0$, der $S = S_{\min}$ når $\theta = \frac{1}{2}\pi \pm n \cdot 2\pi$. Dette gir at $v_0^2 > 3gR$.

Oppgave 5.



Her gjelder det å skaffe seg oversikt over et kronglete sett variable og relasjoner. Én mulighet er å følge koordinater langs snorene, f.eks. med positiv retning m_4 ned, m_3 til høyre og trinsa mellom m_1 og m_2 opp.

En annen mulighet, som vi velger her, er å bruke de vertikale posisjonene z_1, z_2 og z_4 til henholdsvis massene m_1, m_2 og m_4 ; og z_0 for posisjonen til trinsa som snora mellom m_1 og m_2 henger over.

a. Det at snorene har en gitt lengde, gir følgende kinematiske betingelser,

$$\begin{aligned} z_0 + z_4 &= \text{konst.} & (z_0 \text{ øker like mye som } z_4 \text{ minker}) \\ (z_0 - z_1) + (z_0 - z_2) &= \text{konst.} & (\text{snora mellom 1 og 2}) \end{aligned}$$

Dette innebærer tilsvarende betingelser mellom (de vertikale) akselerasjonene, $a_i = \ddot{z}_i$. Dessuten må m_3 's akselerasjon mot høyre, a_3 , være lik a_0 . Det at de tre snorene har konstante lengder, gir alt i alt de følgende tre betingelsene:

$$\begin{aligned} a_0 + a_4 &= 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 &= 0 \\ a_3 &= a_0. \end{aligned}$$

b. Så var det Newtons 2. lov. Vi følger oppgavens anvisning: Snordraget i snora over trinsa 0 kaller vi S_0 , mens snordraget i snorene festet på venstre og høyre side av m_3 kaller vi henholdsvis S_v og S_h . Husk positiv retning oppover for 1, 2 og 4, og til høyre for 3:

$$\begin{aligned} \text{Masse } m_1 : \quad m_1 a_1 &= S_0 - m_1 g \\ \text{Masse } m_2 : \quad m_2 a_2 &= S_0 - m_2 g \\ \text{Masse } m_3 : \quad m_3 a_3 &= S_h - S_v \\ \text{Masse } m_4 : \quad m_4 a_4 &= S_h - m_4 g \end{aligned}$$

Men i tillegg gir Newtons 2. lov en betingelse for akselerasjonen til den masseløse trinsen som m_1 og m_2 henger på:

$$0 \cdot a_0 = 0 = S_v - 2S_0.$$

c. Dette gir til sammen 8 likninger til å bestemme de 8 ukjente, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 og S_0, S_v, S_h .

Dermed er veien åpen til den fullstendige løsning av problemet. Uttrykkene blir ganske grisete, for eksempel er m_1 's akselerasjon gitt som

$$a_1 = -g \frac{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 - m_2 m_3 - 3m_2 m_4}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4}$$

Moralen er at også for kompliserte, sammenhengende systemer gir Newtons 2. lov akselerasjonene (og ved integrasjon: hastighetene og posisjonene som funksjon av tida). Selv om veien frem, som her, kan være ganske kronglete.