

TFY4108 Fysikk

Øving 4

Veiledning: Tirsdag 16. sep. kl. 12:15-14:00.

Innlevering: Fredag 19. sep. kl. 14:00.

Sentrale begreper ved løsning av oppgavene:

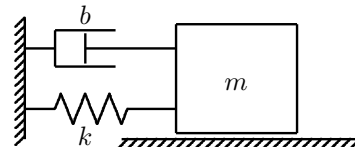
Dempet svingning (14.7), tvungen svingning og resonans (14.8), idealisert pendel (14.5), kinetisk og potensiell energi, energibevaring (7.1-7.2).

Oppgave 1. Dempet svingning

a. På grunnlag av figuren til høyre, vis hvordan man kommer fram til likningen for dempede svingninger:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

og finn uttrykk for γ og ω_0 .



b. Hva betyr det at et system er over-, under- eller kritisk dempet?

c. Vis at $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$ er en løsning av svingelikningen (1) ved å sette inn.

d. Et stempel beveger seg i en sylinder med olje med (dempet) svingetid $T_d = 2,0$ s og friksjonskoeffisient $b = 2,51$ kg/s. Stempelet veier 1,00 kg. Er stempelet over-, under- eller kritisk dempet?

e. En pendel består av en aluminiumkule festet i en 1,00 m lang tråd. Målinger gir at i løpet av 4,0 minutter vil amplituden minke fra $6,00^\circ$ til $5,40^\circ$.

i) Bestem koeffisienten γ i likningen for svak damping. (Vi regner her med konstant vinkelfrekvens.)

ii) Bestem perioden T_d for den dempede svingningen. Har dempningen noen praktisk betydning på pendelens periode?

Oppgave 2. Amplitude for tvungen svingning

Amplituden for en tvungen svingning (for tider tilstrekkelig store til at transienter har blitt dempet bort) er gitt som

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (2)$$

der F_0 og ω er hhv. amplitude og vinkelfrekvens av den ytre, harmonisk oscillerende kraften.

a. Finn et uttrykk for vinkelfrekvensen $\omega = \omega_r$ som gir maksimal amplitude. Finn denne maksimumsverdien og vis at den divergerer når $\gamma \rightarrow 0$.

b. Finn forenklete uttrykk for amplituden for små og store frekvenser (dvs. $\omega \ll \omega_0$ og $\omega \gg \omega_0$) og vis at disse er uavhengig av γ .

c. Vis at uttrykket for amplituden (2) kan omskrives som

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2xy)^2}} \quad (3)$$

der $z = Ak/F_0$, $x = \omega/\omega_0$, og $y = \gamma/\omega_0$ er dimensjonsløse størrelser (dvs. "rene" tall uten enheter). Bruk matematisk software (f.eks. MATLAB) til å plotte z som funksjon av x for noen utvalgte y -verdier mellom 0 og 1. Kommentér overensstemmelsen med resultatene du fant i a. og b.

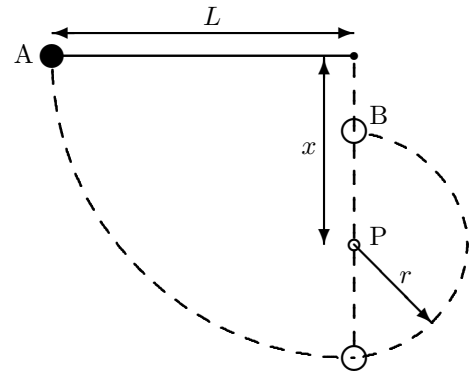
Oppgave 3. En pendel med to ulike lengder

En pendel består av ei kule med masse m i ei snor med lengde L , som vist i figuren. Pendelen trekkes ut til snora er vannrett i posisjon A, og slippes. Snora treffer en pinne P i avstand x rett under pendelens opphengingspunkt. Herfra svinger pendelen rundt denne pinnen slik at pendellengden blir kortere.

a. Bruk energibetraktning til å vise at farten til kula når den er rett over pinnen i posisjon B, blir:

$$v = \sqrt{2g(2x - L)}$$

b. Hvor stor må x være ift. L for at kula skal nå fram til posisjon B (dvs. med stram snor)?



Oppgave 4. Matematisk pendel

I forelesningene så vi på en idealisert ("matematisk") pendel, definert som en kule med masse m festet i en masseløs snor med lengde L . Vi viste at bevegelsesligningen for en slik pendel som svinger i et vertikalt plan er

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

der θ er vinkelen mellom snora og vertikalretningen, og g er tyngdens akselerasjon. Vi diskuterte også kort (og uten å gi et bevis) at svingeperioden T til pendelen kan skrives som en uendelig rekke:

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \right]. \quad (5)$$

Her er θ_0 den maksimale utsvingsvinkelen, og $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ er perioden til den "harmoniske" pendelen man får ved å approksimere $\sin \theta \approx \theta$ i (4).

I denne oppgaven skal vi beregne perioden T ved å løse bevegelsesligningen for den matematiske pendelen numerisk (denne ligningen kan ikke løses analytisk). Vi skal så se på hvor gode approksimasjoner for T man får ved å inkludere hhv. ett og to ledd i den uendelige rekken i (5).

Dersom vi bruker (4) som den står vil den numeriske utregningen avhenge av parameteren L/g . For å unngå dette skifter vi først variabel fra t til den dimensjonsløse $\tilde{t} = \sqrt{\frac{g}{L}}t$ og omskriver (4) til

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{t}^2} + \sin \theta = 0. \quad (6)$$

Denne 2. ordens difflikningen kan videre omskrives til to 1. ordens difflikninger:

$$\frac{d\theta}{d\tilde{t}} = \Omega, \quad (7)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tilde{t}} = -\sin \theta, \quad (8)$$

der den første ligningen definerer en (reskalert) vinkelhastighet Ω . Dette gir ligningssettet

$$\theta(\tilde{t} + d\tilde{t}) = \theta(\tilde{t}) + d\tilde{t} \Omega(\tilde{t}), \quad (9)$$

$$\Omega(\tilde{t} + d\tilde{t}) = \Omega(\tilde{t}) - d\tilde{t} \sin \theta(\tilde{t}). \quad (10)$$

Numerisk erstatter vi den infinitesimale størrelsen $d\tilde{t}$ med en endelig, men "liten nok" differanse $\Delta\tilde{t}$. Fra initialbetingelsene $\theta(\tilde{t} = 0)$ og $\Omega(\tilde{t} = 0)$ finner vi så θ og Ω ved tidene $\Delta\tilde{t}$, $2\Delta\tilde{t}$, $3\Delta\tilde{t}$ osv. ved numerisk iterasjon av ligningssettet (9)-(10). (Den numeriske metoden beskrevet her kalles **Eulermetoden**.) For å finne perioden T for en gitt maks utsvingsvinkel $\theta_0 > 0$ slippes pendelen fra denne vinkelen med null starthastighet. Initialbetingelsene blir derfor

$$\theta(\tilde{t} = 0) = \theta_0, \quad (11)$$

$$\Omega(\tilde{t} = 0) = 0. \quad (12)$$

Istedet for å beregne svingetiden ved å iterere systemet en hel periode, bruker vi symmetri og itererer kun til pendelen når bunnen første gang; da har det gått en kvart periode, så vi finner perioden $\tilde{T}$ ved å gange tidspunktet ved bunnen med 4. Perioden for den fysiske tidsvariabelen er $T = \tilde{T}\sqrt{L/g}$.

La oss nå se på approksimasjonen $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ til perioden T . Det relative avviket (RA) blir (i prosent)

$$\text{RA} = 100 \frac{T - T_0}{T} = 100 \frac{\tilde{T} - 2\pi}{\tilde{T}}. \quad (13)$$

(Dette blir positivt siden $T > T_{\text{approx}}$ fordi hvert ledd i rekken (5) er positivt.) Det relative avviket blir en funksjon av maks utslagsvinkel θ_0 .

Den numeriske utregningen av perioden og det relative avviket mellom T_0 og T er implementert i MATLAB-filen `pendelperiode.m` som er vedlagt øvingen. Programmet har en indre og en ytre `for`-løkke. Utregningen av θ og Ω som funksjon av tidsvariabelen t (“t-krøll”) for en gitt θ_0 blir gjort av den indre løkken. Det testes om pendelen har nådd bunnen av banen vha. en `if`-betingelse som gjør at programmet bryter ut av løkken når θ blir negativ. Den ytre løkken brukes for å “sveipe” over et intervall (her valgt mellom 0 og 45 grader) for vinkelen θ_0 . For hver θ_0 beregnes det relative avviket mellom T og approksimasjonen T_0 . Til slutt plottes en graf over avviket som funksjon av θ_0 .

a. Se på MATLAB-filen `pendelperiode.m` og prøv å forstå hva de enkelte delene av programmet gjør. (Du trenger ikke å skrive noe om det.) Kjør programmet for å produsere figuren av det relative avviket mellom T og T_0 som funksjon av θ_0 .

b. Modifiser programmet til å lage et tilsvarende plott av det relative avviket mellom T og approksimasjonen T_1 , der vi definerer T_1 som uttrykket

$$T_1 \equiv T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \quad (14)$$

som man får ved å inkludere de to første leddene i den uendelige rekken (5).

Utvalgte fasitsvar:

1d) $\gamma = 1,25 \text{ s}^{-1}$, $\omega_0 = 3,38 \text{ s}^{-1}$, 1e) $4,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 2,01 s.

3b) $x > \frac{3}{5}L$.