TFY4108 Fysikk
Løysingsforslag for øving 10

Oppgåve 1.

I kvar overgang vil energien $E = hf = hc/\lambda$ til det emitterte fotonet vere lik differansen mellom start- og slutt-energien til atomet. Dermed:

$$\begin{aligned} E_3 - E_2 &= hc/\lambda_{32}, \\ E_2 - E_1 &= hc/\lambda_{21}, \\ E_3 - E_1 &= hc/\lambda_{31}. \end{aligned}$$

Addisjon av dei to første likningane og bruk av den tredje gir

$$(E_3 - E_2) + (E_2 - E_1) = E_3 - E_1 = hc\left(\frac{1}{\lambda_{32}} + \frac{1}{\lambda_{21}}\right) = \frac{hc}{\lambda_{31}}.$$

Dermed blir

$$\frac{1}{\lambda_{31}} = \frac{1}{\lambda_{32}} + \frac{1}{\lambda_{21}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{31} = \frac{\lambda_{32}\lambda_{21}}{\lambda_{32} + \lambda_{21}} = \frac{800 \cdot 200}{800 + 200}\ \text{nm} = 160\ \text{nm}.$$

Oppgåve 2.

(a) Normeringskravet er $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\, dx = 1$. Dermed:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-amx^2/\hbar} e^{iat} \cdot A e^{-amx^2/\hbar} e^{-iat} \\ &= |A|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2amx^2/\hbar}}_{\sqrt{\frac{\pi}{2am/\hbar}}} = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}} \quad \Rightarrow \quad |A| = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Her brukte vi at a er reell og positiv (hadde a vore negativ, ville integralet ha vore divergent, og normeringskravet ville dermed ha vore umogeleg å tilfredsstille). Normeringskonstanten er difor $A = |A|e^{i\phi} = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$. Fasevinkelen ϕ kan veljast fritt. Det enklaste er å velje $\phi = 0$ slik at A blir reell og positiv. Dermed blir

$$A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

(b) Med den potensielle energien $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ blir TASL

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}.$$

Vi reknar ut dei partiellderiverte, set inn i TASL og deduserer a frå denne. Vi får

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{-2amx}{\hbar} A e^{-amx^2/\hbar} e^{-iat} = -\frac{2amx}{\hbar}\Psi, \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{2am}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = -\frac{2am}{\hbar}\left(\Psi + x\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = -\frac{2am}{\hbar}\left(1 - \frac{2amx^2}{\hbar}\right)\Psi, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= (-ia)Ae^{-amx^2/\hbar}e^{-iat} = -ia\Psi. \end{aligned}$$

Innsetjing i TASL gir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2am}{\hbar}\right)\left(1 - \frac{2amx^2}{\hbar}\right)\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi = i\hbar(-ia)\Psi.$$

Forkorting av den felles faktoren Ψ og vidare forenkling gir

$$\left(-2ma^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\right)x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2a^2 + \frac{1}{2}\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\omega}{2}$$

der vi igjen brukte at a er positiv (ω er positiv).

Løysingar av TASL på forma
$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar},$$
der $\psi(x)$ er ein funksjon av x, og E er ein reell konstant, kallast stasjonære tilstandar fordi sannsynlegheitstettleiken $|\Psi(x,t)|^2$ er stasjonær (dvs. tidsuavhengig):
$$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2.$$
(Parameteren E er energien til partikkelen.) I dette problemet har vi vist at den oppgitte bølgjefunksjonen $\Psi(x,t) = Ae^{-amx^2/\hbar}e^{-iat}$ er ei løysing av TASL for ein harmonisk oscillator (dvs. $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$), og vi kan sjå at løysinga er på ovanståande form med
$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ae^{-amx^2/\hbar}, \\ E &= \frac{\hbar\omega}{2}. \end{aligned}$$
Denne løysinga er altså ein stasjonær tilstand. (Den er faktisk løysinga av TASL med den minste mogelege energien.)

Dette systemet (ein partikkel med masse m og potensiell energi $U = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$) kallast ein *harmonisk oscillator* og er blant dei aller viktigaste systema i kvantemekanikk. Frå tidlegare i kurset veit vi at det også er viktig i klassisk mekanikk: ein partikkel med potensiell energi $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ vil utføre *harmoniske oscillasjonar* (harmoniske svingingar) med vinkelfrekvens ω pga. krafta $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$ (der $k = m\omega^2$) som virkar på partikkelen.

Oppgåve 3.

Sjå håndskrive løysingsforslag som startar på neste side.

Oppgåve 4.

(a) For $E < 0$ kan TUSL skrivast
$$\psi''(x) = \kappa^2\,\psi(x),$$
der $\kappa = \sqrt{2m(-E)/\hbar^2} > 0$. Den generelle løysinga til TUSL kan då skrivast
$$\psi(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}.$$
Grensebetingelsen $\psi(0) = 0$ gir då
$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = A(e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}) = 2A\sinh(\kappa x).$$
Grensebetingelsen $\psi(L) = 0$ gir då
$$2A\sinh(\kappa L) = 0.$$
Sidan $\kappa L \neq 0$ er $\sinh(\kappa L) \neq 0$. Difor må $A = 0$, som gir
$$\psi(x) = 0.$$
Det finst difor ingen fysisk akseptable løysingar for $E < 0$.

(b) For $E = 0$ kan TUSL skrivast
$$\psi''(x) = 0.$$
Den generelle løysinga til TUSL er då
$$\psi(x) = Ax + B.$$
Grensebetingelsen $\psi(0) = 0$ gir då
$$B = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = Ax.$$
Grensebetingelsen $\psi(L) = 0$ gir då
$$AL = 0.$$
Sidan $L \neq 0$ må $A = 0$, som gir
$$\psi(x) = 0.$$
Det finst difor ingen fysisk akseptable løysingar for $E = 0$.

Oppgave 3.

(a) Normeringskravet for $\Psi(x,0)$ er

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,0)|^2 = 1$$

Reknar ut integralet:

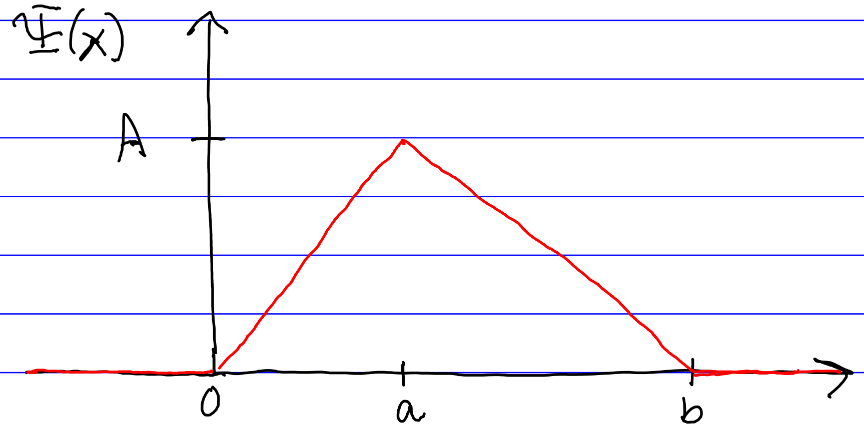
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,0)|^2 = |A|^2 \left[\int_0^a dx \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \underbrace{\int_a^b dx \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2}_{\text{byt integrasjonsvariabel til } z = b-x} \right]$$

$$= |A|^2 \left[\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^a + \frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{b-a} \right]$$

$$= |A|^2 \cdot \frac{1}{3} \left[a + (b-a) \right] = |A|^2 \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{3}{b}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \sqrt{\frac{3}{b}}}} \quad (\text{vi vel } A \text{ reell})$$

(b)



(c) Den mest sannsynlege posisjonen er der sannsynlegheitstettleiken $|\Psi(x)|^2$ er maksimal, som er der $|\Psi(x)|$ er maksimal. Ser av figuren i (b) at dette er ved $x = a$.

(d) La oss kalle sannsynlegheita $P(x<a)$.

$$P(x<a) = \int_0^a dx\, |\Psi(x,0)|^2 = |A|^2 \int_0^a dx \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$= \frac{3}{b} \cdot \frac{1}{3} a = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

Dersom $b=a$ blir $P(x<a)=1$. Dette er rimeleg fordi når $b=a$ har partikkelen null sannsynlegheit for å finnast i regionen $x>a$, og dermed må sannsynlegheita for å finnast i regionen $x<a$ vere 1.

Dersom $b=2a$ blir $P(x<a)=\frac{1}{2}$. Dette er rimeleg fordi når $b=2a$ er sannsynlegheitstettleiken $|\Psi(x,0)|^2$ symmetrisk om $x=a$, og dermed er sannsynlegheitene $P(x<a)$ og $P(x>a)$ like store, og sidan summen av dei må vere 1, blir $P(x<a)=P(x>a)=\frac{1}{2}$.

(e) $$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,0)\, x\, \Psi(x,0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, |\Psi(x,0)|^2 = |A|^2 \left[\int_0^a dx\, x \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \int_a^b dx\, x \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 \right] = |A|^2 \left[\frac{1}{a^2} \int_0^a dx\, x^3 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(b-a)^2} \int_0^{b-a} dz\, z^2 (b-z) \right]$$

Det første integralet blir $\frac{1}{4} x^4 \Big|_0^a = \frac{a^4}{4}$.

Det andre integralet blir

$$\int_0^{b-a} dz \, (bz^2 - z^3) = \left(\frac{b}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^{b-a}$$

$$= \frac{b}{3} (b-a)^3 - \frac{(b-a)^4}{4} = (b-a)^3 \left[\frac{b}{3} - \frac{b-a}{4} \right]$$

$$= (b-a)^3 \, \frac{4b - 3(b-a)}{12} = \frac{(b-a)^3 (b+3a)}{12}$$

Dermed blir

$$\langle x \rangle = \frac{3}{b} \left[\frac{a^2}{4} + \frac{(b-a)(b+3a)}{12} \right]$$

$$= \frac{3}{b} \cdot \frac{\cancel{3a^2} + b^2 + 3ab - ab - \cancel{3a^2}}{12} = \underline{\underline{\frac{a}{2} + \frac{b}{4}}}$$

Dersom $b = 2a$ blir $\langle x \rangle = \frac{a}{2} + \frac{2a}{4} = \underline{\underline{a}}$.
Dette er rimeleg fordi i dette tilfellet er sannsynlegheitstettleiken $|\Psi(x,0)|^2$ symmetrisk om $x = a$, og dermed ligg $\langle x \rangle$ i symmetripunktet.

(f) Vi bruker at urissa Δx kan uttrykkjast som

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Sidan vi allereie har rekna ut $\langle x \rangle$, treng vi berre rekne ut $\langle x^2 \rangle$ for å finne Δx.

Vi har

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x,0) \; x^2 \; \Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^2 \, |\Psi(x,0)|^2$$

$$= |A|^2 \left[\frac{1}{a^2} \int_0^a dx \; x^2 x^2 + \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b dx \; x^2 (b-x)^2 \right]$$

Det første integralet er $\frac{1}{5} x^5 \Big|_0^a = \frac{1}{5} a^5$.

Det andre integralet er

$$\int_a^b dx \; x^2 \, (b-x)^2 = \int_0^{b-a} dz \; (b-z)^2 \, z^2$$

$$= \int_0^{b-a} dz \left[b^2 z^2 - 2bz^3 + z^4 \right]$$

$$= \left(b^2 \frac{1}{3} z^3 - 2b \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^{b-a}$$

$$= (b-a)^3 \left[\frac{b^2}{3} - \frac{b(b-a)}{2} + \frac{(b-a)^2}{5} \right]$$

$$= (b-a)^3 \, \frac{10b^2 - 15b(b-a) + 6(b-a)^2}{30} = (b-a)^3 \, \frac{b^2 + 3ab + 6a^2}{30}$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{3}{b} \left[\frac{a^3}{5} + \frac{(b-a)(b^2 + 3ab + 6a^2)}{30} \right]$$

$$= \frac{3}{b} \, \frac{\cancel{6a^3} + b^3 + 3ab^2 + 6a^2 b - ab^2 - 3a^2 b - \cancel{6a^3}}{30}$$

$$= \frac{b^2}{10} + \frac{ab}{5} + \frac{3a^2}{10}$$

Dette gir

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \frac{b^2}{10} + \frac{ab}{5} + \frac{3a^2}{10} - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{10} + \frac{ab}{5} + \frac{3a^2}{10} - \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{b^2}{16}$$

$$= \frac{3b^2}{80} - \frac{ab}{20} + \frac{a^2}{20}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{20}} \sqrt{a^2 - ab + \frac{3}{4} b^2}}}$$

La oss igjen sjekke spesialtilfellet $b = 2a$. Dette gir

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{20}} \sqrt{a^2 - a \cdot 2a + \frac{3}{4}(2a)^2} = \frac{a}{\sqrt{10}} \simeq 0.316\, a$$

Eit skjematisk plott av sannsynlegheitstettleiken $|\Psi(x,0)|^2$, samt $\langle x \rangle$ og Δx, er vist under for dette spesialtilfellet.

$b = 2a$: