TFY4108 Fysikk, løysing til øving 11

Oppg. 1

(a) $$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,t)\, \hat{x}\, \Psi(x,t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\psi_n^*(x)\, \cancel{e^{iE_nt/\hbar}}\right) x \left(\psi_n(x)\, \cancel{e^{-iE_nt/\hbar}}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x\; \psi_n^*(x)\, \psi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x\, |\psi_n(x)|^2$$

Vi ser at uttrykket er tidsuavhengig. Set no inn uttrykket for $\psi_n(x)$ for partikkel i boks:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & 0 < x < L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx\; x\, \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Byt integrasjonsvariabel til $y = \frac{n\pi x}{L}$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \int_0^{n\pi} dy\; y\, \sin^2 y$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{8} \left[2y\,(y - \sin 2y) - \cos 2y \right]\Big|_0^{n\pi}$$

$$= \frac{L}{4n^2\pi^2}\left[2n\pi \left(n\pi - \underbrace{\sin 2n\pi}_{=0} \right) - \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1} - \left(0 - \underbrace{\cos 2\cdot 0}_{=1} \right) \right]$$

$$= \frac{L}{4\cancel{n^2}\cancel{\pi^2}} \cdot 2\cancel{n^2}\cancel{\pi^2} = \underline{\underline{\frac{L}{2}}}$$, dvs. midt i boksen

Alternativt kan ein argumentere vha. symmetri: Sidan sannsynlegheitsfordelinga for posisjonen,

$$P(x) = \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

er symmetrisk om midtpunktet $\frac{L}{2}$, vil forventningsverdien for posisjonen,

$$\langle x \rangle = \int_0^L dx \; x \; P(x)$$

vere lik midtpunktet, dvs. $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$.

(b) Her finst det igjen fleire mogelege løysingsmåtar. Den enklaste måten er å bruke Ehrenfests teorem, som gir

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} \qquad (*)$$

Sidan vi fann i (a) at $\langle x \rangle$ er tidsuavhengig (fordi den aktuelle tilstanden er stasjonær), blir difor $d\langle x \rangle / dt = 0$, så $(*)$ gir

$$\underline{\underline{\langle p \rangle = 0}}$$

Alternativt bruker ein

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi^*(x,t)\ \hat{p}\ \Psi(x,t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi_n^*(x,t)\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\ \Psi_n(x,t)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi_n^*(x)\ \frac{\partial}{\partial x}\ \psi_n(x)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\ \frac{2}{L}\ \underbrace{\int_0^L dx\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{(**)} = \underline{\underline{0}}$$

At integralet (**) er 0 kan sjåast på fleire måtar:

(i) Bevegelsesmengda er ein fysisk storleik, så $\langle p\rangle$ må vere reell. Integralet (**) er reelt, så dersom det ikkje er null blir $\langle p\rangle$ imaginær (pga. faktoren $\frac{1}{i} = -i$ som multipliserer integralet). Dermed må integralet vere null.

(ii) Funksjonen $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ er ein like eller odde funksjon om midtpunktet $L/2$ (like for odde n og odde for like n). Den deriverte $\frac{d}{dx}f(x)$ av ein like / odde funksjon $f(x)$ er ein odde / like funksjon. Integranden i (**) er dermed produktet av ein like og odde funksjon, som er ein odde funksjon, så integralet blir 0.

(iii) Direkte utrekning av integralet:

$$\int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{n\pi}{L} \int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \cancel{\frac{n\pi}{L}} \cancel{\frac{L}{n\pi}} \int_0^{n\pi} dy \underbrace{\sin y \cos y}_{\frac{1}{2}\sin 2y} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2y \Big|_0^{n\pi} = \underline{0}$$

(c) $$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Psi^*(x,t)\, \hat{x}^2 \, \Psi(x,t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 \, |\psi_n(x)|^2 \qquad \text{(via same steg som i (a))}$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L dx \, x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \int_0^{n\pi} dy \, y^2 \sin^2 y$$

Vha. det oppgitte uttrykket i tipsfila blir integralet

$$\frac{1}{24}\left[4y^3 + (3-6y^2)\sin 2y - 6y\cos 2y\right]\Big|_0^{n\pi}$$

$$= \frac{1}{24}\Big[4(n\pi)^3 + (3-6(n\pi)^2)\underbrace{\sin 2n\pi}_{=0} - 6n\pi \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1} - (0)\Big]$$

$$= \frac{1}{6}(n\pi)^3 - \frac{1}{4}n\pi = \frac{1}{6}(n\pi)^3\left[1 - \frac{3}{2}\frac{1}{(n\pi)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \cancel{\frac{2}{L}} \frac{L^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{(n\pi)^3}} \cdot \frac{1}{\cancel{6}\,3} \cancel{(n\pi)^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{1}{(n\pi)^2}\right]$$

$$= \underline{\underline{L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right)}}$$

(d) $$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$
$$= \sqrt{L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$
$$= L\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}} = \underline{\underline{L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}}}}$$

(e) Dersom ein plottar sannsynlegheitsfordelinga $P(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ som funksjon av x, ser ein at når n vert auka blir det meir sannsynleg å finne partikkelen ut mot kantane på brønnen. Sannsynlegheitsfordelinga blir altså effektivt breiare for større n, som er konsistent med at uvissa Δx aukar med n.

(f) Når $n \to \infty$ oscillerer sannsynlegheitsfordelinga $|\psi_n(x)|^2 \propto \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ uendeleg fort med x
$\Rightarrow$ essensielt uniform (dvs. konstant) sannsynleghetsfordeling
dvs. $P(x) \simeq \frac{1}{L}$ (sidan vi må ha $\int_0^L dx\, P(x) = 1$).
Det gir

$$\langle x\rangle = \int_0^L dx\, x\, P(x) = \int_0^L dx\, x\cdot\frac{1}{L} = \frac{L}{2},$$
$$\langle x^2\rangle = \int_0^L dx\, x^2 P(x) = \int_0^L dx\, x^2\cdot\frac{1}{L} = \frac{L^2}{3}$$
$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{L^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{L}{\sqrt{12}}}}$$

(g) $$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,t)\, \hat{p}^2\, \Psi(x,t)$$

Set inn $\Psi(x,t) = \Psi_n(x,t)$ og $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi_n^*(x,t) \underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}_{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \Psi_n(x,t)$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi_n^*(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_n(x,t)$$

Sidan $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) \, e^{-iE_n t/\hbar}$ kansellerer igjen tidsavhengigheita i Ψ_n og Ψ_n^*

$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi_n^*(x) \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underbrace{\psi_n(x)}_{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}}_{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \psi_n(x)}$$

$$= \hbar^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi_n^*(x) \psi_n(x)}_{=1} = \underline{\underline{\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2}}$$

(h) $$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 - 0^2} = \underline{\underline{\frac{n\pi\hbar}{L}}}$$

(i) Finn $\Delta x \, \Delta p$ ved å setje inn uttrykka for Δx og Δp

$$\Rightarrow \Delta x \, \Delta p = \cancel{L} \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}} \cdot \frac{n\pi\hbar}{\cancel{L}} = \hbar \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}$$

Dette uttrykket er openbart $\underline{\text{minst}}$ for grunntilstanden ($n=1$), då det blir

$$\hbar \sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}} \simeq 0.568\,\hbar \; \underline{\underline{> \frac{\hbar}{2}}}.$$ Så vi har verifisert at Heisenbergs uvisserelasjon er tilfredsstilt for alle n.

Oppg. 2

$$\Psi(x,0) = A\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right]$$

(a) Normalisering:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,0)\,\Psi(x,0)$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\psi_1^*(x) + \psi_2^*(x)\right]\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right]$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + \psi_2^*(x)\,\psi_1(x) + \psi_1^*(x)\,\psi_2(x)\right]$$

Bruker no ortonormalitetseigenskapen:

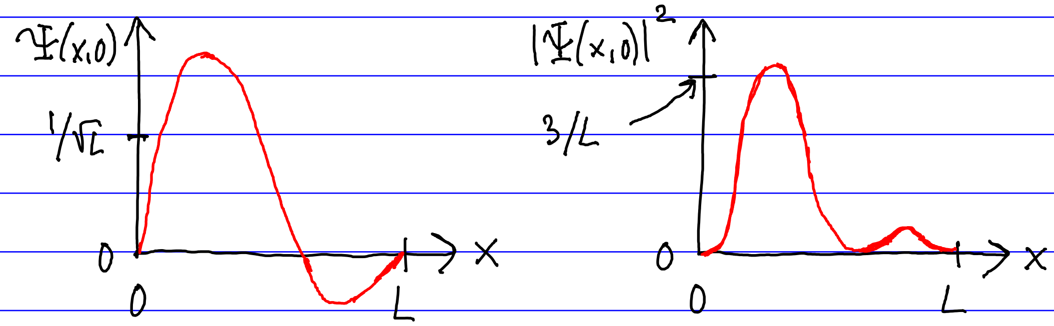
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\,\psi_m(x) = \delta_{nm}$$

$$\Rightarrow\ 1 = |A|^2\left[1 + 1 + 0 + 0\right] = 2|A|^2 \ \Rightarrow\ |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Velg A reell $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow\ \Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$$

Skjematisk:



(b) Løysinga av TASL kan skrivast

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}$$

Vi ser at $\Psi(x,0)$ allereie er på denne forma (set $t=0$) med $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $c_n = 0$ for $n > 2$.

For å få $\Psi(x,t)$ "hektar" vi då berre på eksponensialfaktorane $\exp(-iE_n t/\hbar)$ som gir tidsavhengigheita

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(x)\, e^{-iE_2 t/\hbar}\right)}}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\psi_1^*(x)\, e^{iE_1 t/\hbar} + \psi_2^*(x)\, e^{iE_2 t/\hbar}\right] \left[\psi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(x)\, e^{-iE_2 t/\hbar}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + \psi_2^*(x)\psi_1(x)\, e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} + \psi_1^*(x)\psi_2(x)\, e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right]$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\left[|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right)\right]}}$$

(der vi i siste ledd brukte at $\psi_n(x)$ er reell og at $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$) Tilstanden $\Psi(x,t)$ er <u>ikkje stasjonær</u>, fordi den er <u>ikkje</u> på forma $\psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$. Alternativt kan vi sjå det frå uttrykket for $|\Psi(x,t)|^2$, som er <u>tidsavhengig</u>.

(c) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x \, |\Psi(x,t)|^2 = \int_0^L dx \; x \, |\Psi(x,t)|^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^L dx \; x \, |\psi_1(x)|^2}_{= L/2} + \underbrace{\int_0^L dx \; x \, |\psi_2(x)|^2}_{= L/2} \right]$$

bruker resultatet frå oppg. 1a

$$+ \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right) \cdot \int_0^L dx \; x \; \psi_1(x) \, \psi_2(x)$$

Integralet: $\int_0^L dx \; x \; \psi_1(x) \psi_2(x) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \; x \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi x}{L}$

Kan bruke oppgitt formel eller skrive

$$\sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right]$$

(vha. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$)

$\Rightarrow$ integralet blir $\frac{2}{L} \cdot \frac{1}{2} \int_0^L dx \; x \left[\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right]$

delvis integrasjon

$$= \frac{1}{L}\left\{ x \frac{L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}\right)\Big|_0^L \right.$$

$\leftarrow$ gir 0

$$\left. - \int_0^L dx \; \frac{L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{L}{3\pi}\right)\cos\frac{3\pi x}{L}\right]\Big|_0^L$$

$$= \frac{L}{\pi^2}\left[\cos\pi - \cos 0 - \frac{1}{9}\cos 3\pi + \frac{1}{9}\cos 0\right]$$

$$= \frac{L}{\pi^2}\left[-1 - 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right] = -\frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{L}{2} - \frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2}\cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{L}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\cos\left(\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right)\right]$$

Ser at $\langle x \rangle$ er på forma

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2} - \tilde{A}\cos\omega t$$

Amplituden er $\tilde{A} = \frac{L}{2}\cdot\frac{32}{9\pi^2} \simeq 0.36\,\frac{L}{2}$

Vi ser at amplituden er betydeleg mindre enn $L/2$, som er betryggjande (hadde vi fått ein amplitude $> L/2$ kunne vi umiddelbart ha forkasta svaret som feil, sidan det ville ha implisert at for visse tidsintervall er $\langle x \rangle$ utanfor brønnen, som er umogeleg).

Vinkelfrekvensen er $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\cdot\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\cdot(2^2 - 1^2)$

$$= \frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{mL^2}$$

(d) Sidan vi kjenner $\langle x \rangle$ som funksjon av t, finn vi $\langle p \rangle$ lettast vha. Ehrenfests teorem:

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -m \cdot \frac{16L}{9\pi^2} \cdot \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \cdot \left(-\sin \frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right)$$

$$= \cancel{m} \frac{16L}{9\cancel{\pi^2}} \cdot \frac{3}{2} \frac{\hbar \cancel{\pi^2}}{\cancel{m}L^2} \sin\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{3} \frac{\hbar}{L} \sin\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)}}$$

Alternativt, men meir tungvint her, kan ein finne $\langle p \rangle$ frå standard uttrykket

$$\langle F \rangle = \int dx\, \Psi^* \hat{F} \Psi \qquad \text{med} \quad \hat{F} = \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \langle p \rangle = \int dx\, \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

Presenterer no utrekninga, men gir ikkje detaljar for utrekning av diverse integral.

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_0^L dx\, \Psi^*(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t$$

$$= \frac{\hbar}{2i} \int_0^L dx \left[\psi_1^*(x)\, e^{iE_1 t/\hbar} + \psi_2^*(x)\, e^{iE_2 t/\hbar} \right]$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\psi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(x)\, e^{-iE_2 t/\hbar} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\frac{2}{L}\Big[\underbrace{\frac{\pi}{L}\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{2\pi}{L}\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{=0}$$

$$+ e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\,\frac{2\pi}{L}\underbrace{\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}_{-\frac{2L}{3\pi}}$$

$$+ e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}\,\frac{\pi}{L}\underbrace{\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\frac{4L}{3\pi}}\Big]$$

$$= \frac{\hbar}{L}(-i)\frac{4}{3}\underbrace{\left(e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} - e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right)}_{2i\sin\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{8\hbar}{3L}\sin\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}}}$$

(e) Sidan $\Psi(x,t)$ (sjå (b)) har $c_n = 0$ for $n > 2$, er dei mogelege måleresultata for ei energimåling begrensa til verdiane E_1 og E_2. Sannsynlegheitene for å måle desse verdiane er

$$P(E_1) = |c_1|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}, \quad P(E_2) = |c_2|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(Sjekk at den totale sannsynlegheiten er 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \cdots = 1, \text{ OK!}$$)

(f) $$\langle E\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} E_n P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n |c_n|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(E_1+E_2)}}$$