TFY4108 Fysikk
Tips for øving 11

- Oppgåvene i denne øvinga dreiar seg om ein partikkel i ein uendeleg djup potensialbrønn ("partikkel i boks"). Dei stasjonære tilstandane $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) for dette problemet har romleg bølgjefunksjon
$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{for } 0 \le x \le L, \\ 0 & \text{for } x \le 0 \text{ og } x \ge L \end{cases} \tag{1}$$
og energi
$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\,n^2. \tag{2}$$
Her er L breidden på brønnen og m er massen til partikkelen. Funksjonane $\{\psi_n(x)\}$ er ortonormale, dvs.
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi_n^*(x)\psi_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{for } m = n \\ 0 & \text{for } m \neq n \end{array} \right\} \equiv \delta_{n,m}. \tag{3}$$

- Uvissa for ein generell variabel F kan uttrykkjast som $\Delta F = \sqrt{\langle F^2\rangle - \langle F\rangle^2}$. Formlar for $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ i generelle tilstandar $\Psi(x,t)$ er diskuterte i kap. 3 og 4 i dei supplerande notata om kvantemekanikk (sjå lenke i forelesingsplanen).

Oppgåve 1.

(a)-(g) Utrekninga av integrala kan gjerast på forskjellige måtar. Kan f.eks. skifte variabel til $y = n\pi x/L$ og deretter bruke diverse oppgitte formlar (sjå under).

(a) Oppgitt: $\int dy\ y\sin^2 y = \frac{1}{8}[2y(y - \sin 2y) - \cos 2y]$ + konstant.

(b) Oppgitt: $\sin 2y = 2\sin y\cos y$.

(c) Oppgitt: $\int dy\ y^2\sin^2 y = \frac{1}{24}[4y^3 + (3 - 6y^2)\sin 2y - 6y\cos 2y]$ + konstant.

(e) Sjå spesielt på korleis sannsynlegheitstettleiken $|\psi_n(x)|^2$ endrar seg ved kantane av boksen når n aukar.

(g) Bruk f.eks. at $(2/L)\int_0^L dx\ \ \sin^2(n\pi x/L) = 1$ (som kjem frå normeringskravet på dei stasjonære tilstandane, dvs. tilfellet $n = m$ i (3)).

Oppgåve 2.

(a) Utrekninga blir enklast ved å gjere bruk av likning (3).

(c) Her er det lov å bruke resultatet frå oppgåve 1a, der du skulle ha funne at forventningsverdien til x i alle stasjonære tilstander for partikkel i boks er $L/2$, m.a.o. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x|\psi_n(x)|^2 = L/2$. Du vil måtte rekne ut eit integral i det tidsavhengige leddet, t.d. ved å bruke $\int dy\, y\sin y\sin 2y = \frac{2}{3}y\sin^3 y + \frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{18}\cos 3y +$ konstant.

(d) Du kan finne $\langle p\rangle$ frå det generelle uttrykket $\langle F\rangle = \int dx\,\Psi^*(x,t)\hat{F}\ \Psi(x,t)$ for ein forventningsverdi og bruke $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Men sidan du allereie har rekna ut $\langle x\rangle$ som funksjon av t i (c), er det mykje mindre arbeid å finne $\langle p\rangle$ vha. Ehrenfests teorem, dvs. $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$.

(e) Eikvar løysing av TASL kan skrivast på forma $\Psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$. Bruk dette til å identifisere verdiane av c_n her. Sannsynlegheiten for å måle verdien E_n er $|c_n|^2$.

(f) Sidan du allereie skal ha identifisert sannsynlegheitene $|c_n|^2$ i (e) er det lettast å finne $\langle E\rangle$ ved å bruke $\langle E\rangle = \sum_n E_n|c_n|^2$.