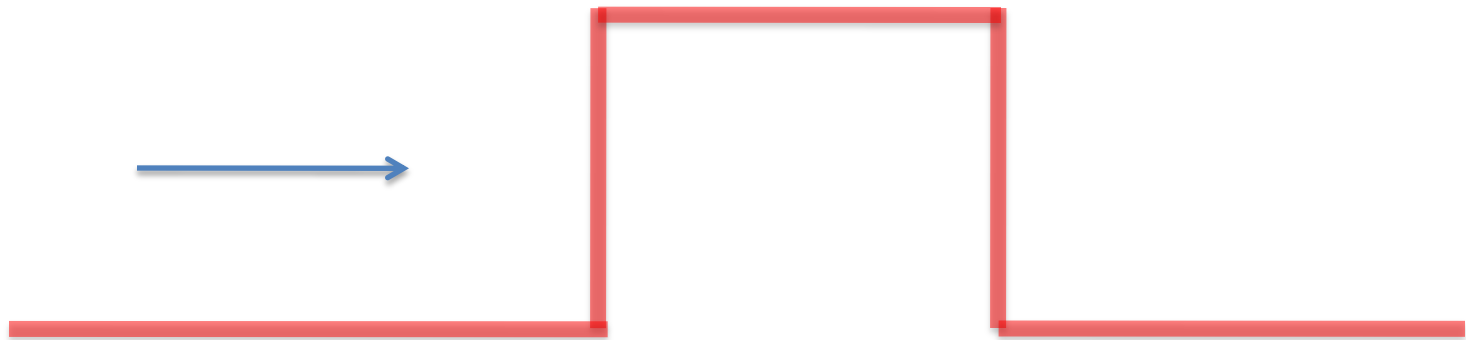


TUNNELERING

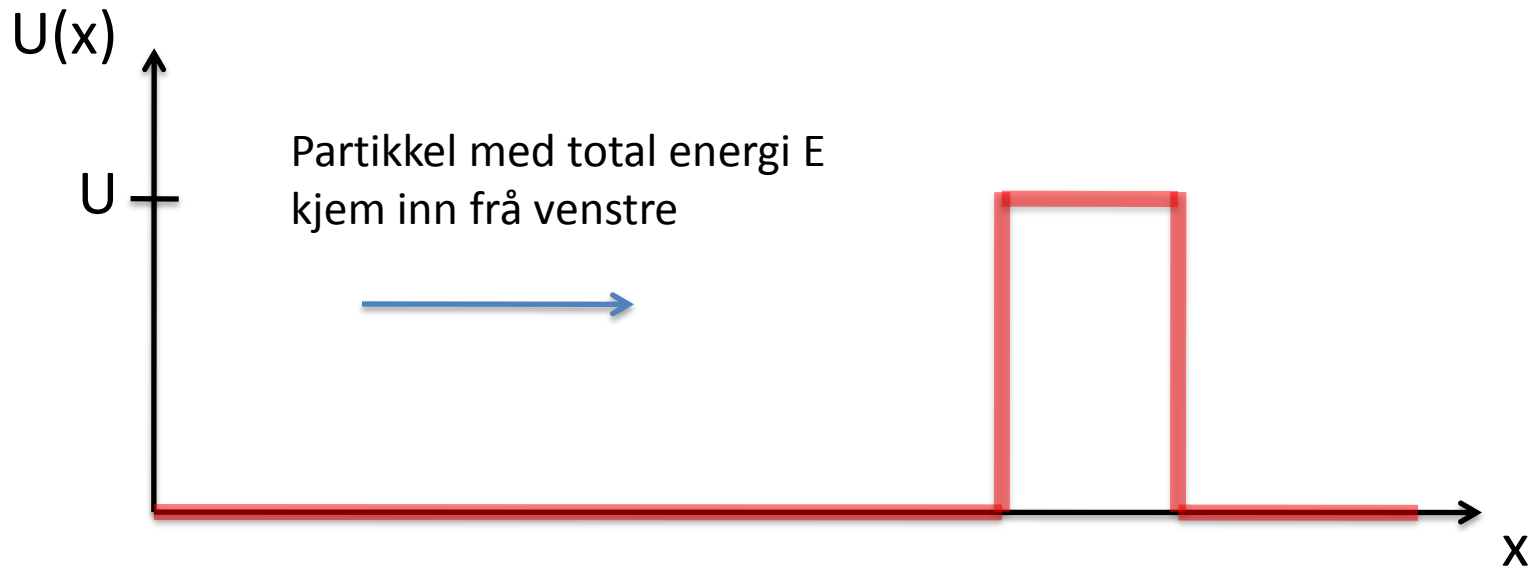
- eit viktig kvantemekanisk fenomen

Tunnelering



- Ein kvantemekanisk partikkel kan vere i stand til å passere ein potensialbarriere sjølv om partikkelenergien er mindre enn høgda til barrieren !
- Viktig i forskjellige fenomen og for teknologisk bruk (f.eks. alfa-desintegrasjon og sveipe-tunnelerings-mikroskopi)

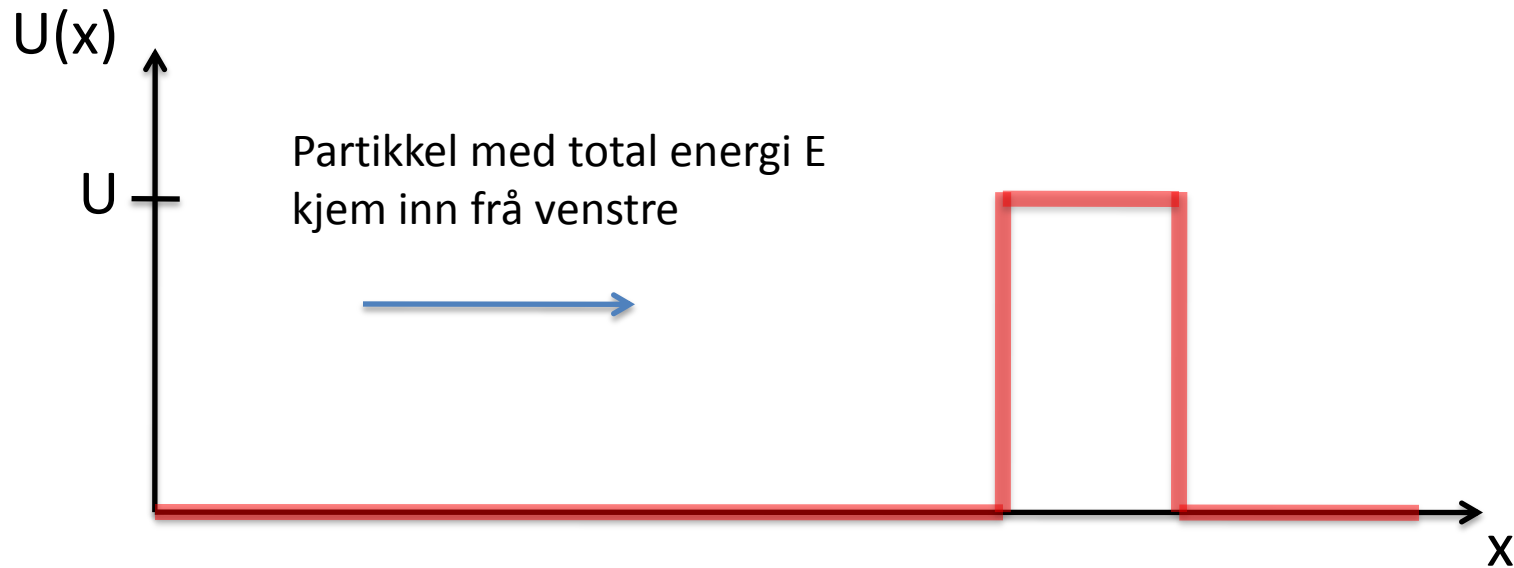
Rektangulær barriere



Klassisk fysikk:

- Dersom $E < U$ vil partikkelen sprette tilbake frå barrieren ("null transmisjon," $T = 0$)
- Dersom $E > U$ vil partikkelen passere barrieren ("fullstendig transmisjon," $T = 1$)

Rektangulær barriere

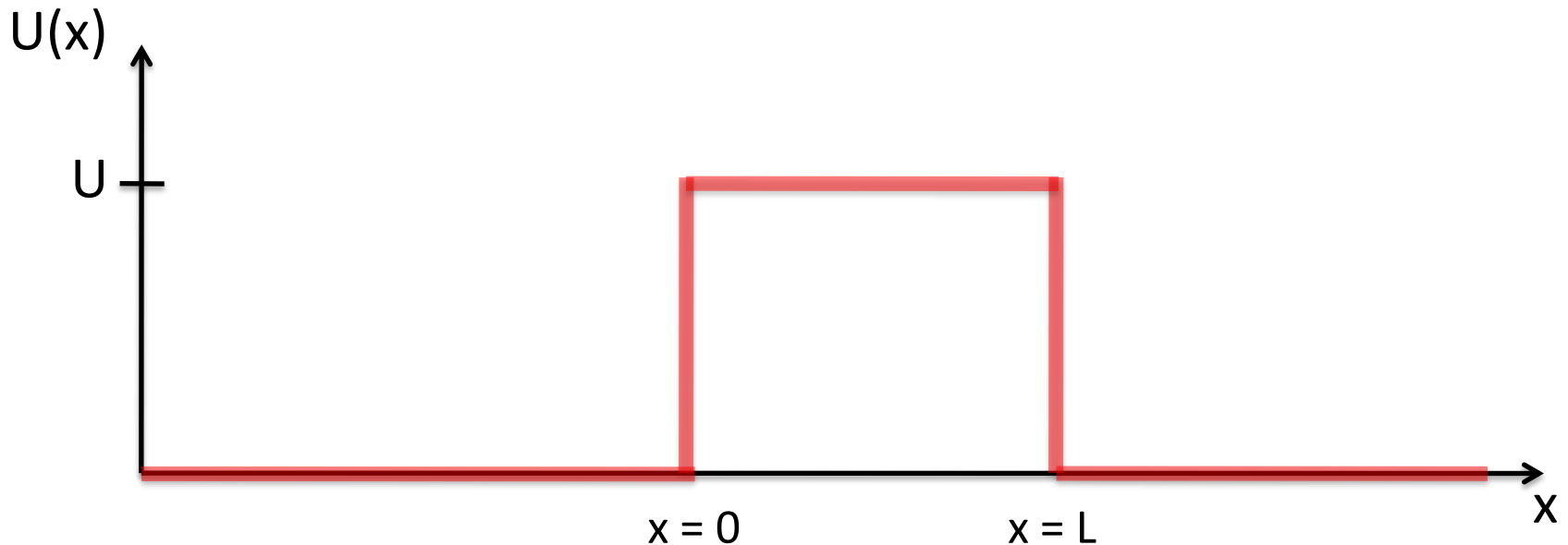


Kvante fysikk:

- Dersom $E < U$ har partikkelen sannsynlegheit > 0 for å passere barrieren (transmisjon $T > 0$): **tunnelering**
- Dersom $E > U$ har partikkelen (generelt) sannsynlegheit > 0 for å sprette tilbake frå barrieren (transmisjon $T < 1$)

Begge resultata strir mot klassisk fysikk

Transmisjon gjennom rektangulær barriere



Løys tids-uavhengig Schrodingerlikning for å finne dei stasjonære tilstandene

Strategi: 1. Løys Schrodingerlikninga i kvar av dei 3 regionane med konstant $U(x)$
2. Skøyt løysingane på grensene mellom regionane

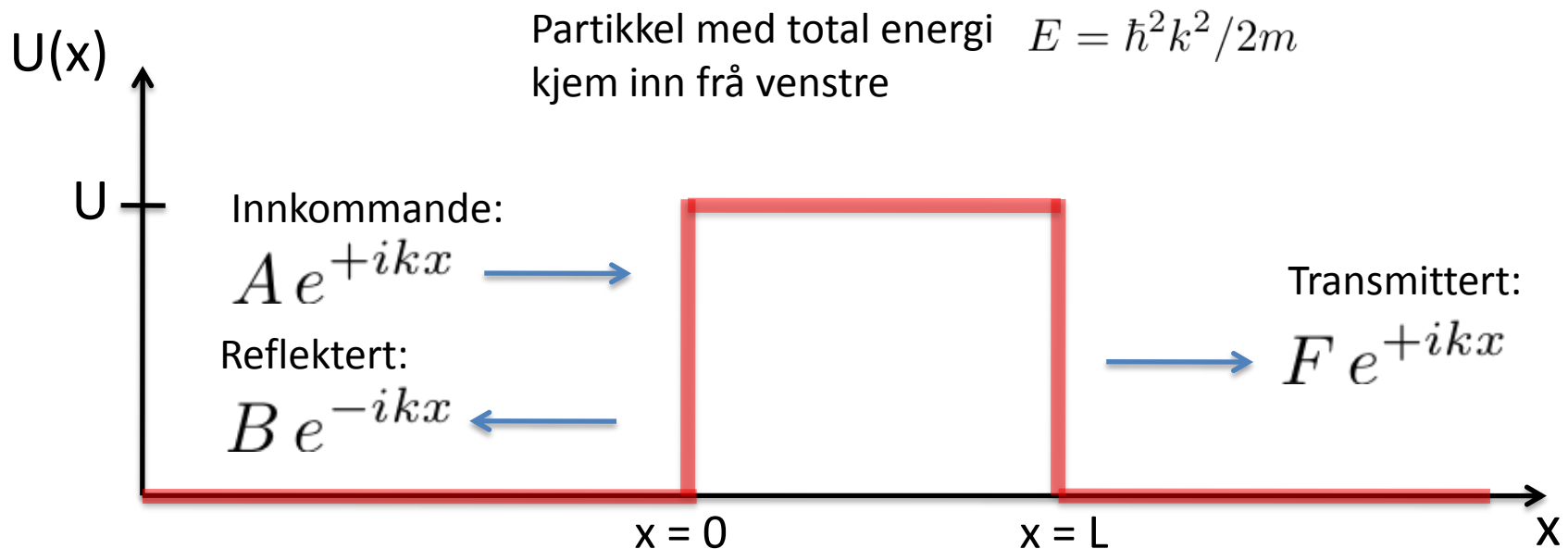
Sjå på partikkel med vilkårleg totalenergi $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ som kjem inn frå venstre

$x < 0$ og $x > L$: partikkelen er fri

$$x < 0 : \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$x > L : \psi(x) = Fe^{ikx} \quad (\text{ingen reflektert del})$$

Transmisjon gjennom rektangulær barriere



Refleksjons-
koeffisient:

$$R = \frac{\text{sannsynlegheitstettleik for reflektert bølge}}{\text{sannsynlegheitstettleik for innkommande bølge}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

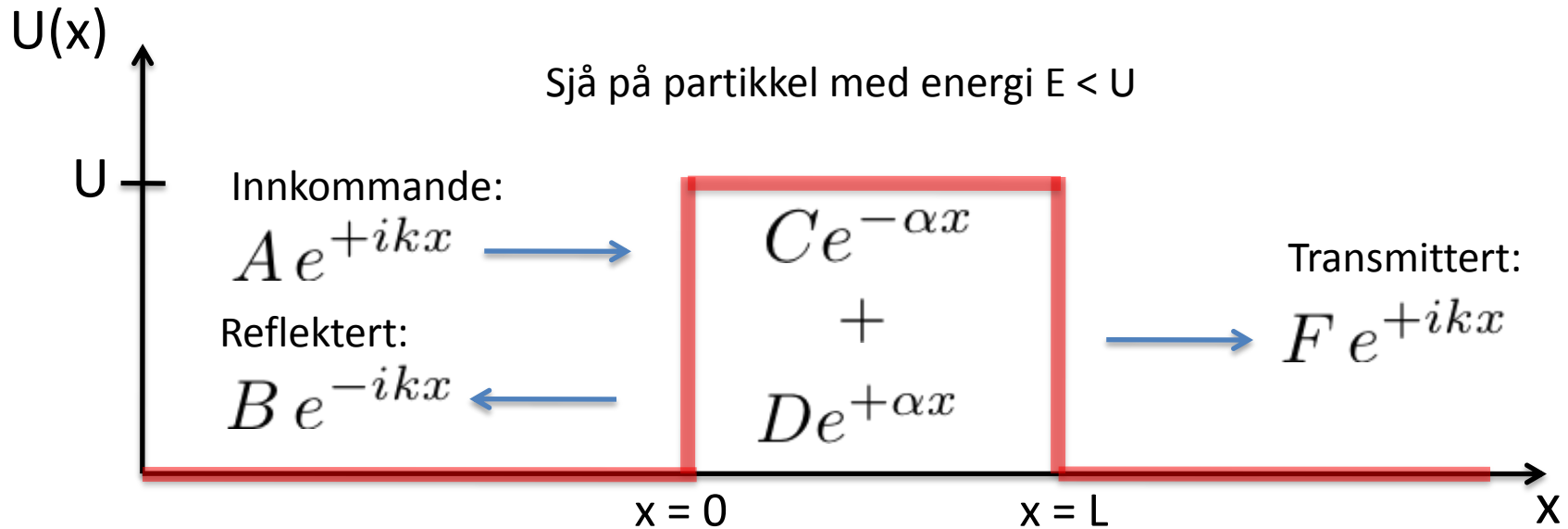
Transmisjons-
koeffisient:

$$T = \frac{\text{sannsynlegheitstettleik for transmittert bølge}}{\text{sannsynlegheitstettleik for innkommande bølge}} = \left| \frac{F}{A} \right|^2$$

Bevaring av sannsynlegheit:

$$R + T = 1$$

Transmisjon gjennom rektangulær barriere ($E < U$)



$$k = \sqrt{2mE}/\hbar, \quad \alpha = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar$$

Krev kontinuitet av ψ og $d\psi/dx$ ved $x = 0$ og $x = L$

Dette gir 4 likningar

Har også 4 ukjende: B, C, D, F

(E og U er gjevne, og A kan veljast vilkårleg)

Dei 4 likningane er:

$$A + B = C + D \quad [\text{continuity of } \psi \text{ at } x = 0]$$

$$ikA - ikB = \alpha D - \alpha C \quad [\text{continuity of } \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ at } x = 0]$$

$$Ce^{-\alpha L} + De^{\alpha L} = Fe^{ikL} \quad [\text{continuity of } \psi \text{ at } x = L]$$

$$\alpha De^{\alpha L} - \alpha Ce^{-\alpha L} = ikFe^{ikL} \quad [\text{continuity of } \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ at } x = L]$$

Løysing av dette likningssettet gir transmisjonskoeffisienten (gyldig for $E < U$)

$$T(E) = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[\frac{U^2}{E(U-E)} \right] \sinh^2 \alpha L}$$

Egenskaper til transmisjonskoeffisienten T:

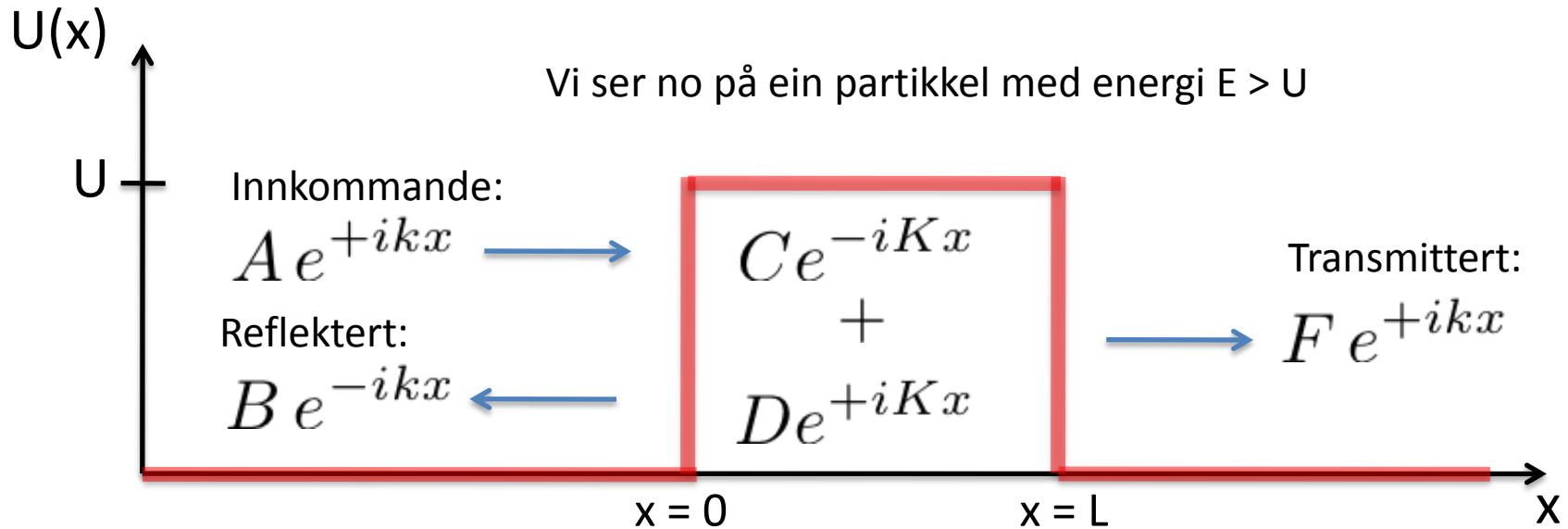
- **Forskjellig fra 0!** Partikkelen **tunnelerer** gjennom barrieren med sannsynlighet T
- Monotont veksande funksjon av E frå $E = 0$ til $E = U$ (med $T = 0$ for $E = 0$)
- $\rightarrow 0$ når massen $m \rightarrow$ uendeleg (klassisk grense) [for fiksert E]
- $\rightarrow 0$ når $U \rightarrow$ uendeleg (uendeleg høg barriere)
- $\rightarrow 0$ når lengda $L \rightarrow$ uendeleg (uendeleg vid barriere) og $\rightarrow 1$ når $L \rightarrow 0$
- T varierer ekstremt raskt med barrierelengda L

Eksempel: Estimer transmisjonskoeffisienten for tunnelering av elektron med energi 7 eV gjennom eit oksidlag som separerer to kopartrådar. Ved å modellere oksidlaget som ein rektangulær barriere med høgde 10 eV finn ein at

Barrierelengde $L = 5 \text{ nm}$ gir $T = 0.96 \times 10^{-38}$
 $L = 1 \text{ nm}$ gir $T = 0.66 \times 10^{-7}$!!

Sjå på PhET demo av tunnelering

Transmisjon gjennom rektangulær barriere ($E > U$)



No tek bølgefunksjonane planbølgeform i alle 3 regionane.

Bølgevektorane er

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar, \quad K = \sqrt{2m(E - U)}/\hbar$$

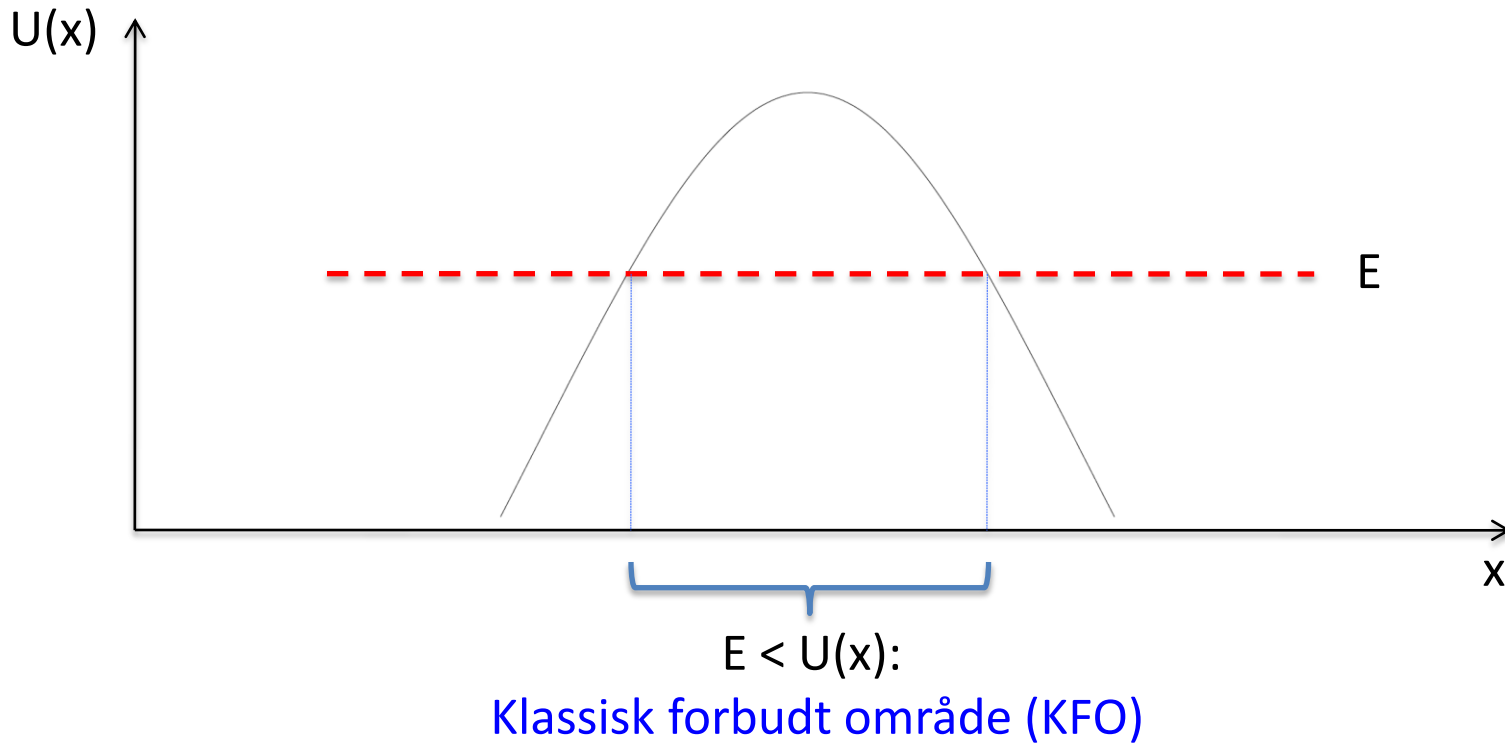
Løys som vanleg, gir transmisjonskoeffisient ($E > U$)

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left[\frac{U^2}{E(E-U)} \right] \sin^2 KL}$$

$T(E) < 1$ generelt
(i motsetnad til klassiske partiklar)

$T(E) = 1$ for $KL = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$)
("transmisjonsresonans")
(utforsk med PhET demo)

Tunnelering gjennom barriere av vilkårleg form



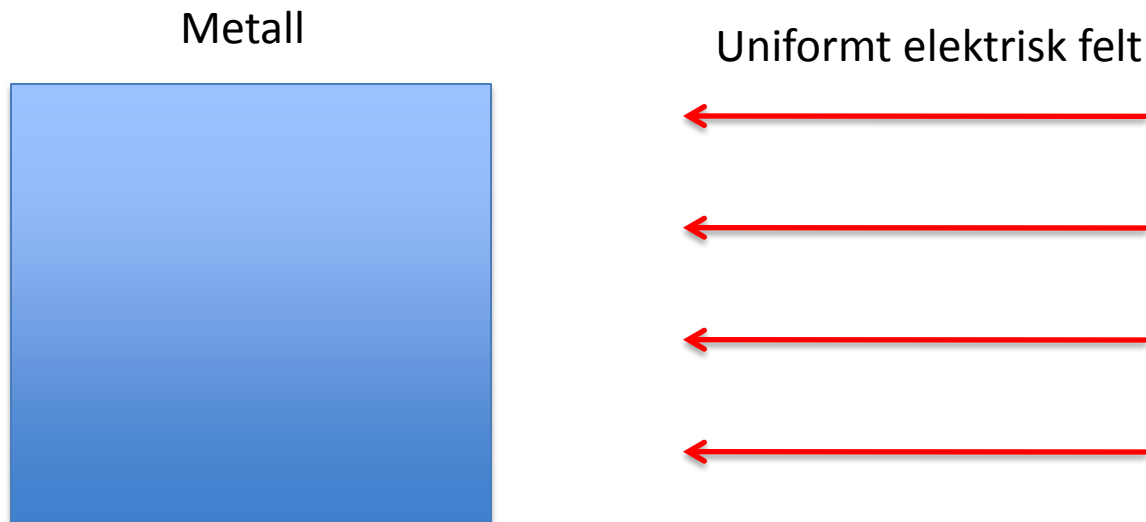
Transmisjonskoeffisient for eit sakte varierende potensial:

$$T(E) \approx \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{\text{KFO}} dx \sqrt{U(x) - E} \right)$$

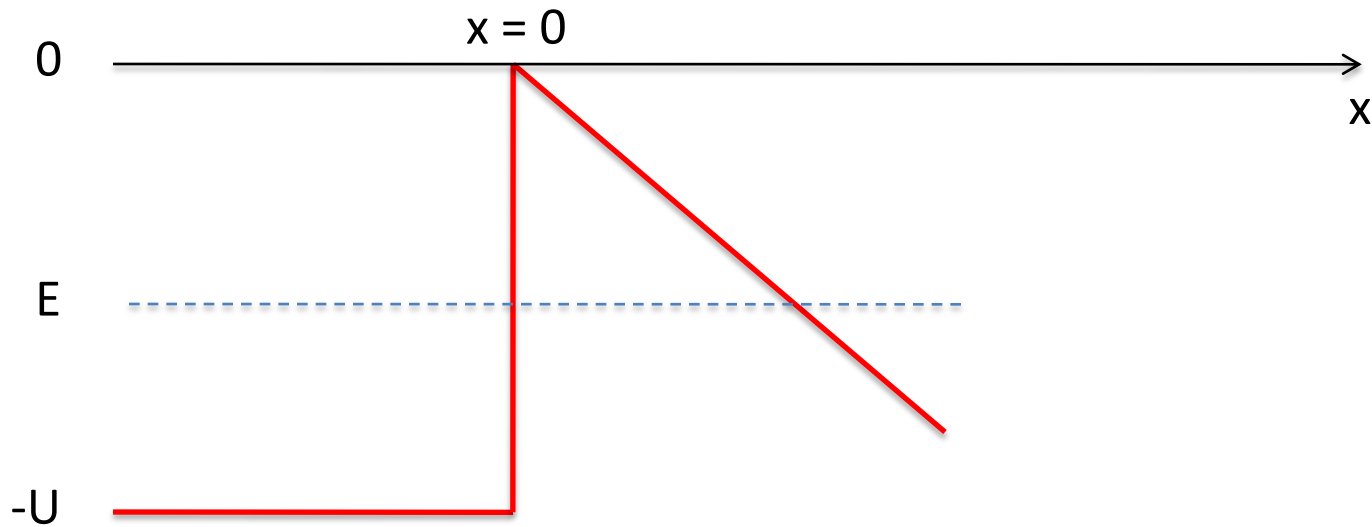
Eksempel på tunnelering: I. Feltemisjon

- Elektron kan forlate eit metall pga. tunnelering frå ei metalloverflate gjennom ein triangulær barriere skapt av eit eksternt elektrisk felt
- Kan brukast til å få informasjon om overflata, sidan graden av tunnelering er veldig sensitiv til lokale detaljar i overflata
- Brukt i sveipe-tunnelerings-mikroskop

Skjematisk:



Tilhørende potensiell energi $U(x)$



Inne i metallet ($x < 0$) : $U(x) = -U$

Utanfor metallet ($x > 0$): $U(x) = -e \varepsilon x$ (ε er det elektriske feltet)

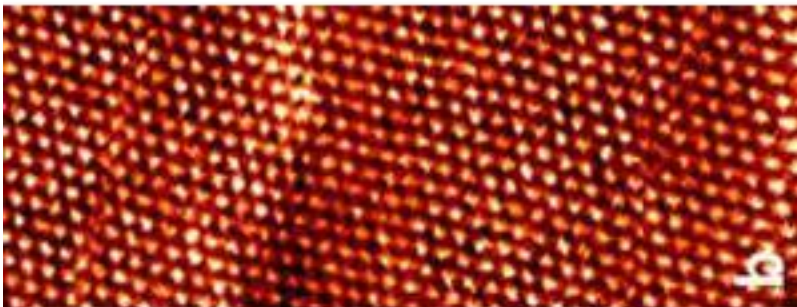
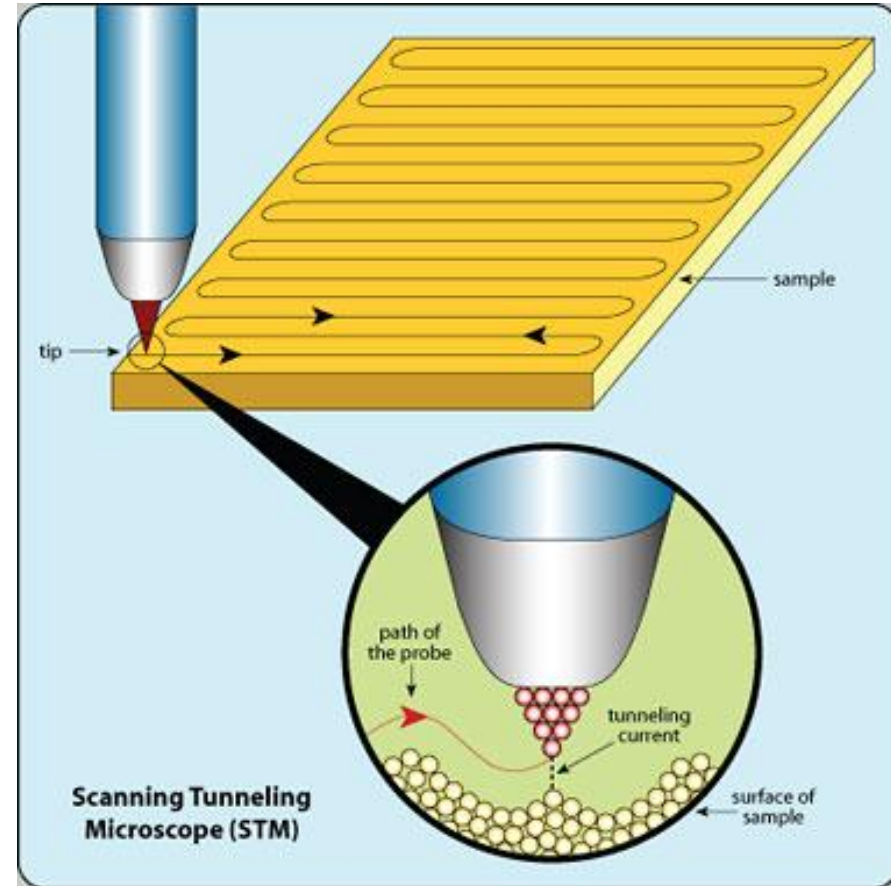
Elektron kan tunnelere ut av metallet gjennom den triangulære barrieren

(utan det elektriske feltet ville ein hatt ein uendeleg lang rektangulær barriere med høgd U , tunnelering ville da ha vore umogeleg)

Sveipe-tunnelerings-mikroskopet (scanning tunneling microscope, STM)

- Gjer bruk av feltemisjon
- Nobelpris i fysikk 1986
- Ein ekstremt tynn metalltipp
- “skannar” langs ei materialoverflate
- Ved å måle tunneleringsstraumen kan ein bestemme avstanden til overflata (straumen minkar essensielt eksponensielt med denne avstanden)

Gir bilete av elektrontettleiksfordelinga på overflata, oppløysing på atomnivå!



STM-bilete av
gulloverflate

Eksempel på tunnelering:

II. Alfa-desintegrasjon

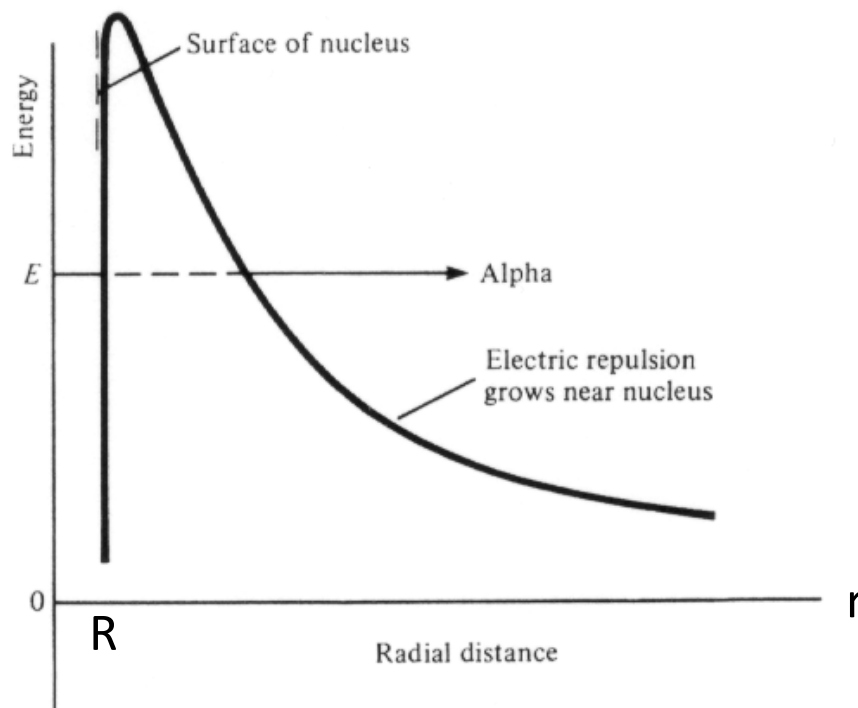
Alfa-desintegrasjon: Radioaktiv prosess som involverer emisjon av α -partiklar (heliumkjerner) frå visse atomkjernar

Skuldast tunnelering av α -partiklar ut av atomkjernen gjennom potensialbarriere (sjå figur)

Vanleg at α -partikkel-energiar kan variere med $\sim$ faktor 2, mens den tilhøyrande halveringstida τ varierer med $\sim$ faktor 10^{24} !!

Dette er ein konsekvens av at tunneleringa avheng ekstremt sensitivt av energien E

Atom-kjerne	α -partikkel energi	Halveringstid
$^{212}_{84}\text{Po}$	8.95 MeV	2.98×10^{-7} sekund
$^{240}_{96}\text{Cm}$	6.40 MeV	27 dagar
$^{226}_{88}\text{Ra}$	4.90 MeV	1.60×10^3 år
$^{232}_{90}\text{Th}$	4.05 MeV	1.41×10^{10} år



(denne sida vart ikkje gjennomgått i detalj i forelesinga)

Alpha-decay: Calculating the half-life

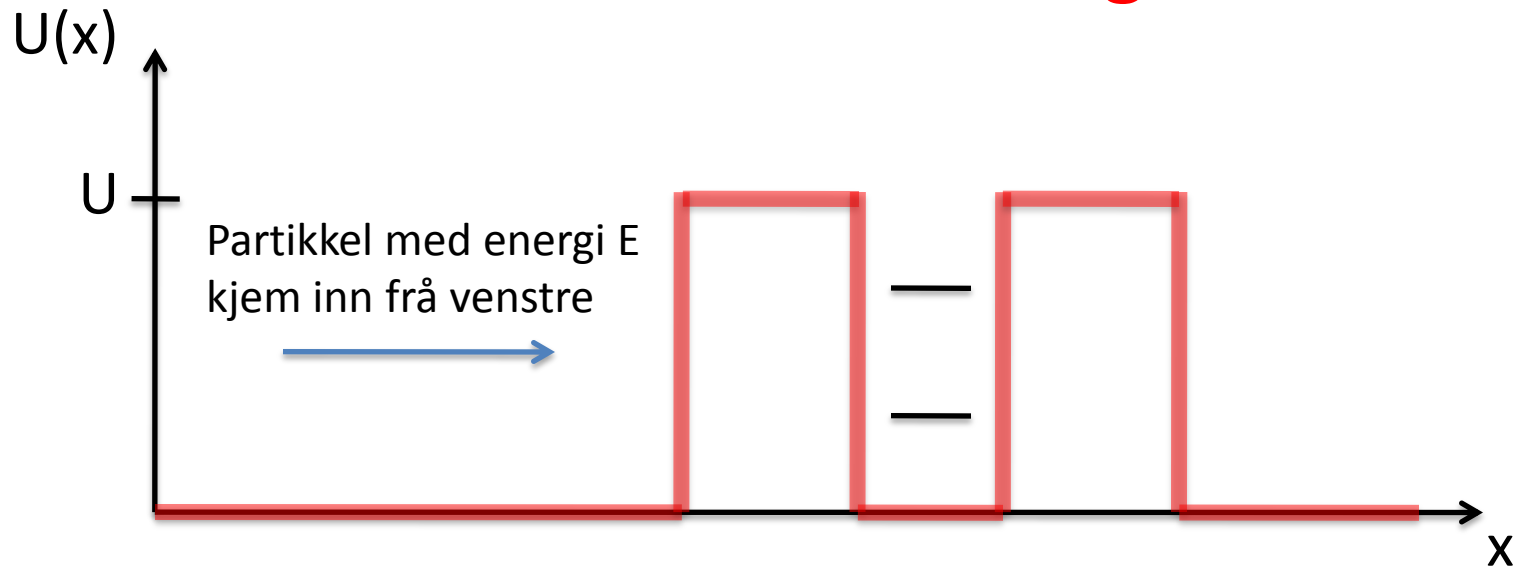
- Decay rate (probability of alpha emission per unit time) is given by $\lambda = f T(E)$, where f is the collision frequency (number of collisions per second that an alpha particle makes with the nuclear barrier)
- $f = 1/T$, where T is time for alpha particle to cross the nucleus
- $T = 2R/v$, where R is nuclear radius and v is average velocity of alpha particle
- Typically $f \sim 10^{21}$ collisions per second
- The half-life τ is defined by

$$\exp(-\lambda\tau) = \frac{1}{2}$$

which gives

$$\tau = (\ln 2)/\lambda = (\ln 2)/(f T(E))$$

Resonant tunneling



Transmisjonskoeffisienten $T(E)$ har maksima når E er lik energien til ein “kvasi-bunden” tilstand inne i brønnen: **Resonant tunneling**

Blir brukt i apparat (“devices”) laga frå halvleiar-heterostrukturar (f.eks. resonant-tunneling dioder)

(Utforsk med PhET demo)