

■ NTNU  
Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi  
Institutt for Fysikk

# Eksamen TFY 4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystem våren 2011

Faglærer: Professor Jens O. Andersen  
Institutt for Fysikk, NTNU  
Telefon: 73593131

Tirsdag 24. Mai 2011  
kl. 09.00-13.00

Tillette hjelpemiddel:  
Godkjend kalkulator  
Rottmann: Matematisk Formelsamling  
Rottmann: Matematische Formelsammlung  
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Vi bruker metrikken  $(1, -1, -1, -1)$  og einingar er  $\hbar = c = 1$ . Oppgavesettet er på fire sider. Nyttige formlar finn du på slutten. Les oppgåvene nøye. Lykke til.

## Oppgave 1

I denne oppgåva skal vi sjå på Dirac fermion i  $2 + 1$  dimensjonar, det vil seie i  $x$ - $y$  planet. Lagrangetettheiten er gjeve ved

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi , \quad (1)$$

der  $\mu = 0, 1, 2$  og  $m$  er massen til fermiona.  $\gamma$ -matrisene tilfredstiller Clifford-algebraen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \quad (2)$$

I 3+1 dimensjonar er desse matrisene  $4 \times 4$  matriser, men i 2+1 dimensjonar kan ein velje  $2 \times 2$  matriser. Vi veljar  $\gamma^0 = \sigma_3$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_2$  og  $\gamma^2 = -i\sigma_1$ , der  $\sigma_i$  er Pauli matrisene. I denne oppgåva bruker vi metrikken  $(1, -1, -1)$ .

1) Vis at Lagrangetettheiten er invariant under globale fasetransformasjonar. Er Lagrangetettheiten invariant under andre transformasjonar?

Vi koplar nå fermionfeltet til eit gaugefelt  $A_\mu$  ved å erstatte den partielt deriverte med ein kovariant derivert, det vil seie  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ , der  $q$  er ladninga til fermiona.

2) Gaugefeltet er i resten av oppgåva gjeve ved  $A^\mu = (0, 0, Bx)$ . Det vil seie at gaugefeltet er eit ytre felt. Finn felta  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$ . Forklar kort kvifor  $x$ -komponenten til impuls ikkje er noko godt kvantetal og kvifor  $y$ -komponenten til impuls er eit godt kvantetal.

3) Vis at Diraclikninga kan skrivast som

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \psi = 0. \quad (3)$$

Vi kan skrive eigenfunksjonane  $\psi(\mathbf{r}, t)$  som

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-i(Et - p_y y)} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

der  $E$  er energien til eigentilstanden og  $p_y$  er  $y$ -komponenten til impuls,  $f(x)$  og  $g(x)$  er funksjonar av  $x$ . Bruk dette til å finne spekteret, det vil seie energieigenverdiane  $E$ .

## Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi studere eit komplekst skalarfelt  $\Phi$  med eit kjemisk potensial  $\mu$  som vekselverkar med seg sjøl. Dette gjer ein ved å erstatte den partielt deriverte  $\partial_0$  med den kovariant deriverte  $\partial_0 - i\mu$  i Lagrangetettheiten som da kan skrivast

$$\mathcal{L} = (\partial_0 + i\mu)\Phi^*(\partial^0 - i\mu)\Phi + (\partial_i\Phi)^*(\partial^i\Phi) - m^2\Phi^*\Phi - \frac{\lambda}{6}(\Phi^*\Phi)^2. \quad (5)$$

1) Er Lagrangetettheiten Lorentzinvariant?

Vi skriv nå feltet  $\Phi$  som summen av eit klassisk felt  $\phi_0$  og eit fluktuerande kvantefelt med

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_0 + \phi_1 + i\phi_2). \quad (6)$$

2) Vis at det klassiske potensialet er

$$V_0 = \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4. \quad (7)$$

3) I resten av oppgåva er  $m^2 > 0$ . Finn det globale minimumet for potensialet  $V_0$  som funksjon av  $\mu$ . Teikn figur og forklar.

4) Leddet i  $\mathcal{L}$  som er kvadratisk i kvantefelta kan skrivast som

$$\mathcal{L}_{\text{kvad}} = -\frac{1}{2}(\phi_1, \phi_2) \begin{pmatrix} \partial_0^2 - \nabla^2 + M_1^2 & -2\mu\partial_0 \\ 2\mu\partial_0 & \partial_0^2 - \nabla^2 + M_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

der  $M_1^2 = m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2$  og  $M_2^2 = m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda}{6}\phi_0^2$ . Bruk dette til å finne dispersjonsrelasjonane som funksjon av  $\mu$ . Forklar resultata.

## Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi studere bosonar og Bose-Einstein kondensasjon i to romlege dimensjonar.

1) Den frie energientettheiten  $\mathcal{F}$  er gjeve ved

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \epsilon(p), \quad (9)$$

der  $\mu$  er det kjemiske potensialet,  $g$  er koplingskonstanten og  $\epsilon(p)$  er Bogoliubovs dispersjonsrelasjon

$$\epsilon(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2m} \left( \frac{p^2}{2m} + 2\mu \right)}, \quad (10)$$

der  $m$  er massen til bosona.

1) Forklar kort dei ulike ledda i uttrykket for  $\mathcal{F}$ . Vis at den renormaliserte frie energien  $\mathcal{F}$  kan skrivast

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi} \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{\mu} + C \right]. \quad (11)$$

2) Bruk dette resultatet til å rekne ut tettheiten som funksjon av  $\mu$  og energitettheiten  $\mathcal{E}$  som funksjon av  $\rho$ .

3) I denne oppgåva har vi brukt dimensjonell regularisering. Nemn ein annan

måte å regularisere divergente integral på. Kva er fordelane med dimensjonell regularisering?

---

Nyttige formalar:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{2\epsilon} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} p \sqrt{p^2 + y^2} = -\frac{y^4}{32\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \log \frac{\Lambda^2}{m\mu} + C + \mathcal{O}(\epsilon) \right],$$

$$\rho = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} + \rho\mu,$$

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$