

TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 3

Oppgave 1.

a.

Uten friksjon peker netto kraft langs skråplanet nedover og har størrelse

$$F_{\text{aks}} = mg \sin \theta = 1,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,50 = 4,905 \text{ N}.$$

Friksjonskrafta er derfor retta oppover. Den maksimale statiske friksjonskrafta er

$$F_{f,\text{max}} = \mu_s mg \cos \theta = 0,43 \cdot 1,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,866 = 3,653 \text{ N},$$

som er mindre enn F_{aks} , så klossen vil starte å gli. Friksjonskrafta når klossen har begynt å gli er

$$F_f = \mu_k mg \cos \theta = 0,40 \cdot 1,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,866 = 3,398 \text{ N} = \underline{3,4 \text{ N}}.$$

Dermed blir akselerasjonen nedover skråplanet

$$a = \frac{F_{\text{aks}} - F_f}{m} = \frac{4,905 \text{ N} - 3,398 \text{ N}}{1,00 \text{ kg}} = \underline{1,51 \text{ m/s}^2}.$$

b. Friksjonskrafta er alltid retta mot bevegelsen vi ville fått dersom det ikke var friksjon, slik at vi må finne ut hvilken retning klossen ville bevege seg med alle ytre krefter på plass, men *uten* friksjon. Uten friksjon ville netto akselererende kraft nedover skråplanet vært

$$F_{\text{aks}} = mg \sin \theta - F = 1,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,50 - 1,00 \text{ N} = 3,905 \text{ N}.$$

Positiv, altså retta nedover. Friksjonskrafta er da retta oppover. Siden $F_{\text{aks}} > F_{f,\text{max}}$ vil klossen begynne å gli nedover. Friksjonskrafta er da $F_f = 3,4 \text{ N}$ som før og akselerasjonen er

$$a = \frac{F_{\text{aks}} - F_f}{m} = \frac{3,905 \text{ N} - 3,398 \text{ N}}{1,00 \text{ kg}} = \frac{0,507 \text{ N}}{1,00 \text{ kg}} = \underline{0,51 \text{ m/s}^2}.$$

c. Med $F = 2,00 \text{ N}$ er netto akselererende kraft nedover $F_{\text{aks}} = 2,905 \text{ N}$, slik at friksjonskrafta også nå virker oppover. Størrelsen avhenger av om klossen sklir eller forblir i ro. Da F_{aks} nå er mindre enn den maksimale statiske friksjonskrafta $F_{f,\text{max}} = 3,653 \text{ N}$, vil klossen forbli i ro ($a = 0$), summen av krefter er lik null og $F_f = F_{\text{aks}} = 2,91 \text{ N}$.

Oppgave 2.

a. Vi tar det som en *arbeidshypotese* at snora er stram, slik at snorkrafta virker oppover på m_1 og nedover på m_2 . Regningene vil bekrefte eller avkrefte denne hypotesen.

Med stram snor må akselerasjonen være den samme for de to klossene, altså

$$\frac{\sum F_1}{m_1} = \frac{\sum F_2}{m_2}$$

$$\frac{m_1 g \sin \theta - m_1 g \mu_1 \cos \theta - S}{m_1} = \frac{m_2 g \sin \theta - m_2 g \mu_2 \cos \theta + S}{m_2}$$

$$g(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta) - S/m_1 = g(\sin \theta - \mu_2 \cos \theta) + S/m_2 \quad (1)$$

Løses denne likningen med hensyn på S er resultatet

$$S = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_2 - \mu_1) \cos \theta.$$

Som vi ser er åpenbart $S > 0$ uansett massenes størrelse, bare $\mu_2 > \mu_1$, som var oppgitt til å gjelde.

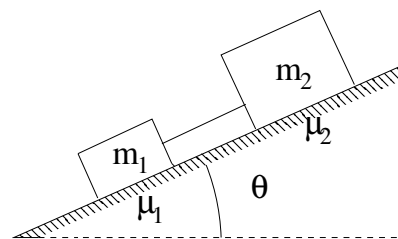
Alternativ kunne vi beregne akselerasjonen kloss 1 og 2 hadde fått dersom de ikke var forbundet med snor:

$$a_1 = g \sin \theta - g \mu_1 \cos \theta, \quad a_2 = g \sin \theta - g \mu_2 \cos \theta.$$

Hvis kloss 1 akselererer fortere enn kloss 2 vil ei snor som forbinder klossene forbli stram, dvs. kravet er

$$a_1 > a_2 \quad \Rightarrow \quad -g \mu_1 \cos \theta > -g \mu_2 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \mu_2 > \mu_1,$$

som var oppgitt til å gjelde.



b. Når vi har vist at snora er stram kan vi betrakte vi de to klossene som ett legeme med tyngdekomponenten og

friksjonskrefter langs skråplanet (snorkrafta motsatt like stor på begge):

$$(m_1 + m_2)a = \sum F = (m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu_1 m_1 g \cos \theta - \mu_2 m_2 g \cos \theta$$

$$a = g \left(\sin \theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos \theta \right),$$

som skulle vises. Alternativt kan vi sette inn uttrykket vi fant for S i uttrykket for akselerasjonen $(\sum F_1)/m_1$ (eller $(\sum F_2)/m_2$), som selvsagt gir samme svar.

Oppgave 3.

a. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4} \text{ s}^{-1}} = \frac{8}{3} \text{ s} = \underline{2,67 \text{ s}}.$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{8} \text{ Hz} = \underline{0,375 \text{ Hz}}. \quad (\text{Eller fra } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{3\pi}{4} \text{ s}^{-1}}{2\pi} = \frac{3}{8} \text{ Hz}.)$$

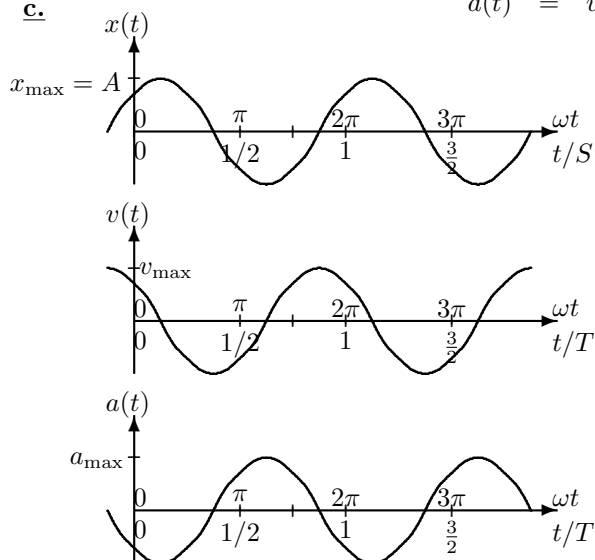
b.

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (2)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (4)$$

c.



d. Ved tida $t = 0$ har vi:

$$x_0 = x(t = 0) = A \cdot \cos(\theta) = A \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = A \cdot 0,707 = 0,5 \text{ m} \cdot 0,707 = \underline{0,35 \text{ m}},$$

$$v_0 = v(t = 0) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\theta) = -0,5 \text{ m} \cdot \frac{3\pi}{4} \text{ s}^{-1} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{0,83 \text{ m/s}}.$$

e. Ifølge likn. (3) er den maksimale hastigheten

$$|v_{\max}| = A\omega = 0,5 \text{ m} \cdot \frac{3\pi}{4} \text{ s}^{-1} = \underline{1,18 \text{ m/s}}.$$

Denne oppnås når $\frac{dv}{dt} = 0$, dvs. når $a(t) = 0$. Ifølge likn. (4) er dette ved

$$\cos(\omega t + \theta) = 0 \Rightarrow \omega t + \theta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Med $\theta = -\frac{\pi}{4}$ og $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gir dette

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi}{\frac{2\pi}{T}} = T \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{n}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ved $n = 0, 2, 4, \dots$, dvs. $t = \frac{3}{8}T, \frac{11}{8}T, \dots$ har hastigheten minimum,

og ved $n = 1, 3, 5, \dots$, dvs. $t = \frac{7}{8}T, \frac{15}{8}T, \dots$ har den maksimum. Jfr. grafen for $v(t)$ ovenfor.

Oppgave 4.

a. Newtons 2. lov gir oss klossenes bevegelseslikninger. La oss velge positiv retning for utsving fra likevekt mot høyre. I den nederste figuren har vi $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$ slik at fjæra til venstre er strukket en lengde x_1 og virker på masse 1 med en kraft mot venstre. Fjæra til høyre er sammenpresset en lengde x_2 og virker på masse 2 med en kraft mot venstre. I den nederste figuren er $x_1 > x_2$ og derfor er fjæra i midten sammenpresset $x_1 - x_2$ og virker på masse 1 med en kraft mot venstre og masse 2 med en kraft mot høyre. Hvis $x_1 < x_2$ er midtfjæra strekt $x_2 - x_1$ med kraft mot høyre for 1 og venstre for 2.

Dermed har vi kraft på masse 1 (positiv mot høyre):

$$F_1 = -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = -3kx_1 + 2kx_2$$

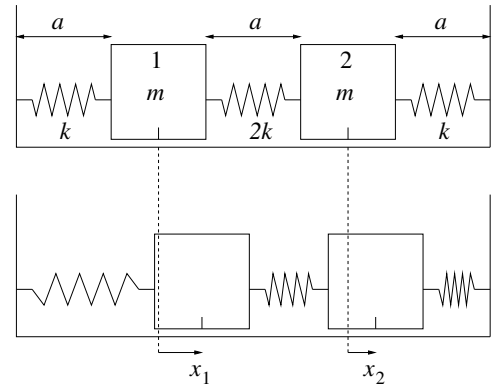
og kraft på masse 2 (positiv mot høyre):

$$F_2 = -kx_2 - 2k(x_2 - x_1) = 2kx_1 - 3kx_2$$

Newtons 2. lov gir da

$$m\ddot{x}_1 = -3kx_1 + 2kx_2 \quad (5)$$

$$m\ddot{x}_2 = 2kx_1 - 3kx_2 \quad (6)$$



b. Ved å sette inn de oppgitte, antatte løsninger for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i likn. (5) og (6), får vi

$$-m\omega^2 A = k(-3A + 2B) \quad (7)$$

$$-m\omega^2 B = k(2A - 3B) \quad (8)$$

etter at vi har strøket en felles faktor $\cos(\omega t + \phi)$ i alle ledd. Fra disse to likningene kan vi finne to uttrykk for forholdet A/B :

$$(7) \Rightarrow A/B = 2k/(3k - m\omega^2) \quad (9)$$

$$(8) \Rightarrow A/B = (3k - m\omega^2)/2k \quad (10)$$

Ettersom venstre side i disse likningene er like store, må også høyre side være det. Dermed:

$$2k/(3k - m\omega^2) = (3k - m\omega^2)/2k \Rightarrow (2k)^2 = (3k - m\omega^2)^2 \Rightarrow 2k = \pm(3k - m\omega^2),$$

altså

$$\omega^2 = \begin{cases} k/m \\ 5k/m \end{cases}.$$

De mulige vinkelfrekvensene er følgelig $\omega_a = \sqrt{k/m}$ og $\omega_s = \sqrt{5k/m}$, som vi skulle vise.

Alternativ løsning: Skriver likn. (7) og (8) på matriseform:

$$\begin{pmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skal denne likningen ha ikke-triviell løsning, må

$$\begin{vmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3k - m\omega^2)^2 - (2k)^2 = 0, \text{ som ovenfor.}$$

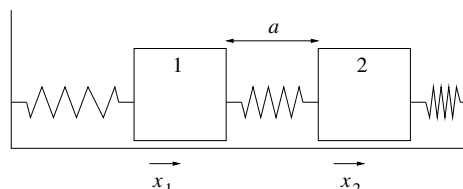
c. Vi finner sammenhengen mellom A og B for hver av de to vinkelfrekvensene ved å sette inn i det ene eller andre uttrykket ovenfor for forholdet A/B :

$$A_a/B_a = 2k/(3k - m\omega_a^2) = 1$$

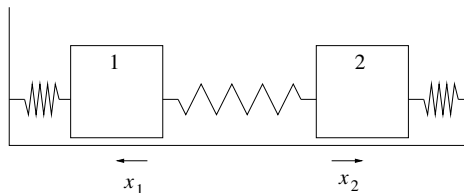
$$A_s/B_s = 2k/(3k - m\omega_s^2) = -1$$

Det betyr at i den "antisymmetriske moden" er $x_1 = x_2$, og de to massene svinger fram og tilbake med samme fase, uten at fjæra i midten strekkes eller presses sammen. I den "symmetriske moden" er $x_1 = -x_2$, og de to massene svinger i motfase, slik at fjæra i midten strekkes og presses sammen dobbelt så mye som fjærene til venstre og høyre.

Antisymmetrisk mode:



Symmetrisk mode:



I den antisymmetriske moden påvirkes hver av de to massene kun av krafta fra ei fjær, ettersom fjæra i midten verken strekkes eller presses sammen. Med andre ord, hver masse svinger på samme måte som om den andre ikke var til stede, og vi må ha $\omega_a^2 = k/m$.

I den symmetriske moden er fjæra til venstre strukket en lengde x_1 og fjæra i midten er sammenpresset en lengde $2x_1$ når masse 1 er i posisjon x_1 . Da blir total kraft på masse 1 lik $-5kx_1$. Med andre ord, masse 1 svinger som om den var festet til ei fjær med fjærkonstant $5k$, slik at vi må ha $\omega_s^2 = 5k/m$. (Tilsvarende argument kan gjennomføres for masse 2.)

Vi ser at dette stemmer med resultatet i punkt **b**.

Kommentar: For å få systemet til å svinge i en av disse to modene, kan vi ikke ha vilkårlige initialbetingelser. Vi ser f.eks. at hvis vi skyver begge massene like langt i samme retning og slipper dem, vil systemet svinge i den antisymmetriske moden. Skyves de to massene like langt i hver sin retning, vil det svinge i den symmetriske moden. Den *generelle* svingebevegelsen vil være en *superposisjon* av begge moder:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\x_2(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) - A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)\end{aligned}$$

Her har vi 4 ubestemte konstanter, A_a , A_s , ϕ_a og ϕ_s , som kan fastlegges hvis vi kjenner (f.eks.) posisjon og hastighet til hver av de to massene ved (f.eks.) $t = 0$.