

TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 4

Oppgave 1.

a. Vi utleder fra Newtons 2. lov, $\Sigma F = ma$:

$$\begin{aligned} -b\dot{x} - kx &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \quad \text{altså med } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ og } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

b.

Det kreves her bare en grov kvalitativ forklaring, uten likninger, og vi forsøker:

Overkritisk: $\gamma > \omega_0$ Systemet søker likevekt uten svingninger.

Kritisk: $\gamma = \omega_0$ Systemet søker likevekt uten svingninger.

Underkritisk: $\gamma < \omega_0$ Systemet svinger frem og tilbake, mens det søker mot likevekt.

Kun underkritisk dempning gir et cos-ledd og dermed svingning, for overkritisk og kritisk dempning blir det ulike eksponentialfunksjoner. Hvor fort systemet søker likevekt er avhengig av tallstørrelsen på dempn.konstanten γ .

c.

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) \\ \dot{x}(t) &= -\gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) - \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) \\ \ddot{x}(t) &= \gamma^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) + \gamma \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) + \gamma \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) - \omega_d^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) \end{aligned}$$

Innsatt i dempet svingelikning får vi:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = [\gamma^2 - \omega_d^2 + 2\gamma(-\gamma) + \omega_0^2] A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) + [\gamma \omega_d + \gamma \omega_d + 2\gamma(-\omega_d)] A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) = 0$$

hvor siste hakeparantes klart er null og første er null når $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$.

d. Vi regner ganske enkelt ut dempningskonstanten γ og udempet frekvens ω_0 og sammenlikner disse:

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{2,51 \text{ kg/s}}{2 \cdot 1,00 \text{ kg}} = 1,25 \text{ s}^{-1}.$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{2,0 \text{ s}} = 3,14 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \gamma^2} = \sqrt{(3,14 \text{ s}^{-1})^2 + (1,25 \text{ s}^{-1})^2} = 3,38 \text{ s}^{-1}.$$

$$\gamma < \omega_0 \Rightarrow \text{underkritisk.}$$

e i) Siden amplituden for en dempet svingning avtar eksponensielt (oppgitt løsning), kan vi uttrykke amplituden som:

$$A'(t) = A e^{-\gamma t} \quad \text{som gir} \quad \ln A' = \ln A - \gamma \cdot t \Rightarrow \gamma = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{A}{A'} \right).$$

Setter så inn $t = 4,0 \text{ min} = 240 \text{ s}$, $A = 6,00^\circ$ og $A' = 5,40^\circ$, og vi får $\gamma = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

ii) $T_d = 2\pi/\omega_d$, så vi må finne verdi for $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. For en pendel med oppgitt $l = 1,00 \text{ m}$ er

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{1,0 \text{ m}} = 9,81 \text{ s}^{-2}.$$

Fra i) ser vi at $\gamma^2 = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$, slik at $\omega_0^2 \gg \gamma^2$. Vi regner ikke på peanuts, så med meget god tilnærming er $\omega_d \approx \omega_0 = 3,13 \text{ s}^{-1}$. (Relativ feil er under 10^{-8} .) Dette gir

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3,13 \text{ s}^{-1}} = 2,01 \text{ s}.$$

Det at $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ i uttrykket for ω_d viser at dempningen er fullstendig neglisjerbar når det gjelder perioden for pendelen, den påvirker bare amplituden.

Oppgave 2.

a. La oss skrive amplituden som $A = F_0/(m\sqrt{G(\omega)})$ der $G(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2$. Et maksimum i A tilsvarer derfor et minimum i G . Ekstrema av G kan bestemmes fra likningen $G'(\omega) = 0$. Vha. kjerneregelen finner vi

$$G'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 2(2\gamma\omega) \cdot 2\gamma = 4\omega[\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)].$$

Likningen $G'(\omega) = 0$ har derfor løsningene (1) $\omega = 0$ (gyldig for alle γ/ω_0) og (2) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ (gyldig for $\gamma/\omega_0 < 1/\sqrt{2}$, siden kun da er uttrykket under rottegnet positivt). Dersom en løsning ω svarer til et minimum i G vil $G''(\omega) > 0$. Fra

$$G''(\omega) = 4[3\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)]$$

finner vi at for $\gamma/\omega_0 < 1/\sqrt{2}$ er $G''(\omega) > 0$ for løsning (2), mens for $\gamma/\omega_0 > 1/\sqrt{2}$ er $G''(\omega) > 0$ for løsning (1). Dermed er vinkelfrekvensen ω_r som gir maksimal amplitude gitt ved

$$\omega_r = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} & \text{for } \gamma/\omega_0 < 1/\sqrt{2}, \\ 0 & \text{for } \gamma/\omega_0 > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

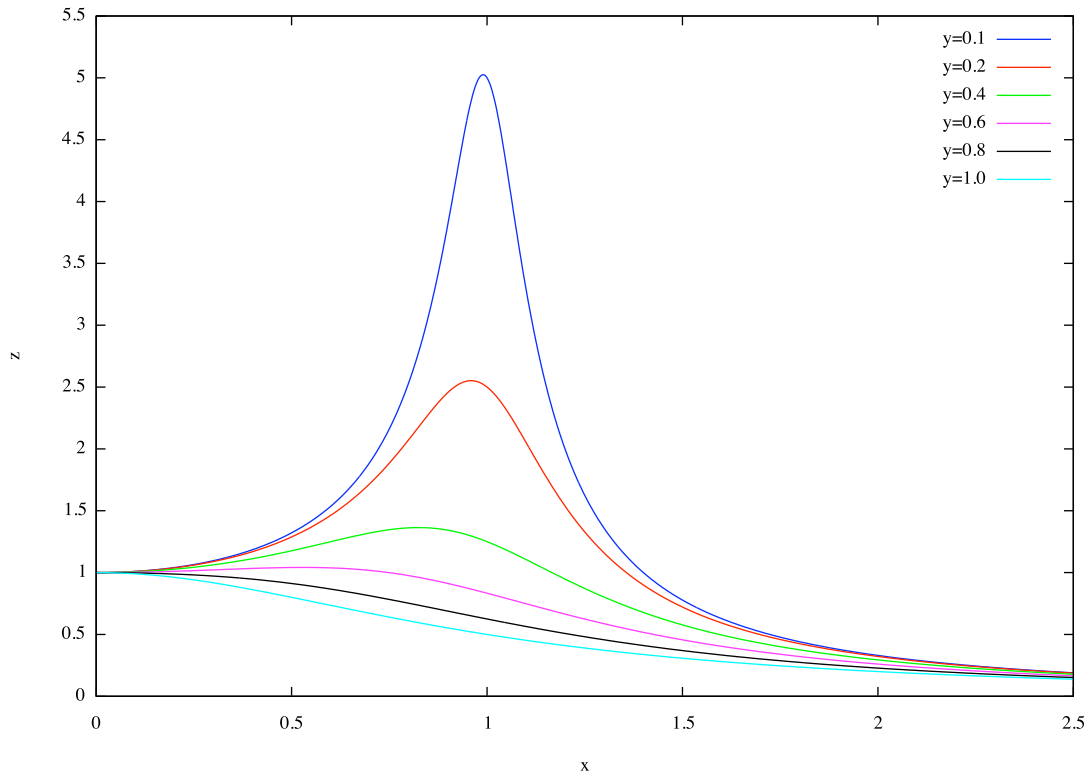
Den maksimale amplituden finnes ved å sette inn $\omega = \omega_r$ i det generelle uttrykket for A . Vi finner

$$A_{\max} = \begin{cases} \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0}{b\sqrt{(k/m)^2 - (b/2m)^2}} & \text{for } \gamma/\omega_0 < 1/\sqrt{2}, \\ \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} & \text{for } \gamma/\omega_0 > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

For $\gamma/\omega_0 \ll 1$ er $A_{\max} \approx F_0/(2m\gamma\omega_0)$, som divergerer i grensen $\gamma/\omega_0 \rightarrow 0$.

b. Fra det generelle uttrykket for A finner vi at for $\omega \ll \omega_0$ er $A \approx F_0/(m\omega_0^2) = F_0/k$, mens for $\omega \gg \omega_0$ er $A \approx F_0/(m\omega^2)$. Vi ser at begge disse uttrykkene er uavhengig av γ .

c. Ved å introdusere de dimensjonsløse størrelsene x , y , og z finner man lett det oppgitte uttrykket. Et plott av z som funksjon av x for $y = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, og 1 er gitt i figuren under. Dette plottet er i overensstemmelse med resultatene funnet i a. og b. Spesielt ser vi at for små y har z maksimum nær, men mindre enn, $x = 1$. Når y økes beveger maksimumet seg mot mindre x -verdier, mens maksimumsverdien av z minker. En topp i z for $x \neq 0$ kan fremdeles så vidt ses for $y = 0.6$ men har forsvunnet ved $y = 0.8$, konsistent med at iflg. a. er toppen ved $x = 0$ for $y > 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Vi ser også klart at for små og store x nærmer kurvene for forskjellige y seg hverandre, jf. b.



Oppgave 3.

a.

Vi kan bruke bevaring av mekanisk energi, fordi kun tyngdekraften, som er konservativ, gjør arbeid (snorkraften gjør null arbeid siden den alltid står normalt på forflytningen.) Bevaring av mekanisk energi gir

$$\begin{aligned}E_{p,A} + E_{k,A} &= E_{p,B} + E_{k,B} \\mgL + 0 &= mg \cdot (2r) + \frac{1}{2}mv_B^2 \\2gL &= 4gr + v_B^2.\end{aligned}$$

Innsatt $r = L - x$ i likningen får vi

$$v_B = \sqrt{2gL - 4g(L - x)} = \sqrt{2g(2x - L)}. \quad (1)$$

b. Snorkrafta S og tyngden virker på kula. Vi bruker Newtons 2. lov og uttrykket for sentripetalakselerasjonen:

$$S + mg = ma = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow S = \frac{mv^2}{r} - mg. \quad (2)$$

Snora er stram for $S > 0$, som fra likn. (2) gir kravet $v^2 > gr$. Vi bruker så uttrykket for v_B i likn. (1) og at $r = L - x$:

$$2g(2x - L) > g(L - x) \Rightarrow 5x > 3L \Rightarrow \underline{x > \frac{3}{5}L}.$$

Oppgave 4.

a. Se figuren til venstre.

b. Strengt tatt er det kun formelen for relativt avvik i linja etter if-setningen som må endres, til

```
relavvik(j) = 100*(1-(1+0.25*(sin(j*dtheta0/2))^2)*pi/(2*n*dtkroll));
```

Dette gir figuren til høyre. Vi ser at det relative avviket går betydelig ned når man inkluderer det neste leddet i rekka. (Grafen til høyre er mer "hakkete" fordi oppløsningen langs vertikalaksen er $\approx 4/0.35 \approx 11.4$ ganger større enn i grafen til venstre.)

