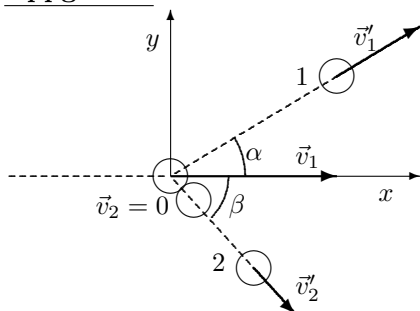


TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 5

Oppgave 1.



a. Figur til venstre

b. De to massene er like og kan derfor forkortes bort fra alle regninger. Impulsbevarelse forenkles da til bevarelse av vektorsummen $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

siden puck nr. 2 lå stille før den ble truffet av puck nr. 1. På komponentform blir dette

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1' \cos \alpha + v_2' \cos \beta \\ 0 &= v_1' \sin \alpha - v_2' \sin \beta. \end{aligned}$$

Med $\alpha = 30^\circ$ og $\beta = 45^\circ$ er $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ og $\cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, som gir

$$\begin{aligned} 2v_1 &= v_1'\sqrt{3} + v_2'\sqrt{2} \\ 0 &= v_1' - v_2'\sqrt{2} \end{aligned}$$

med løsning

$$\underline{v_1' = 29 \text{ m/s} \quad ; \quad v_2' = 21 \text{ m/s.}}$$

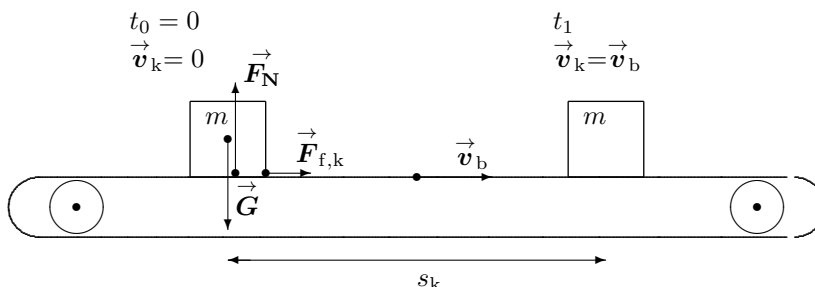
c. De kinetiske energiene før og etter støtet er

$$E_K = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad ; \quad E_K' = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2.$$

Det relative energitapet i støtet er derved

$$\frac{E_K - E_K'}{E_K} = \frac{v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2}{v_1^2} = 20\%.$$

Oppgave 2.



I denne løsningen står indeksene k og b for hhv. kartong og band, med unntak av i μ_k , der k står for kinetisk og i $\Delta E_{k,k}$ der de to k'ene står hhv. for kinetisk og kartong.

a. Kreftene som virker på kartongen er tyngden $\vec{G}$, normalkrafta $\vec{F}_N$ og friksjonskrafta $\vec{F}_{f,k}$, som vist i figuren. Vi kan se at $\vec{F}_{f,k}$ virker mot høyre som følger: Friksjonskrafta på kartongen vil peke i motsatt retning av den relative bevegelsen av kartongen i forhold til bandet vi ville ha fått dersom det ikke var friksjon. I det tilfellet ville kartongen ha stått stille mens bandet beveger seg til høyre, dvs. den relative bevegelsen av kartongen i forhold til bandet er mot venstre, og dermed peker friksjonskrafta på kartongen mot høyre.

Newtons 2. lov i vertikal retning samt uttrykk for friksjonskraft gir oss

$$F_N = G = mg \quad F_{f,k} = \mu_k F_N = \mu_k mg$$

Kartongens økte kinetiske energi må være lik tilført arbeid. Det er kun friksjonskrafta $\vec{F}_{f,k}$ som gjør arbeid på kartongen, så denne kraftas arbeid blir

$$\underline{W_{f,k} = \Delta E_{k,k} = E_{k,k}(t_1) - E_{k,k}(t_0) = \frac{1}{2}mv_b^2.} \quad (1)$$

Arbeidet er dermed positivt. Dette er konsistent med at friksjonskrafta $\vec{F}_{f,k}$ og forflytningen $\vec{s}_k$ av kartongen er i samme retning.

b. Kartongen har flytta seg strekning s_k i forhold til laboratoriesystemet (bakken) i løpet av den tida friksjonskrafta virker (se figuren over). Vi har

$$W_{f,k} = \vec{F}_{f,k} \cdot \vec{s}_k = F_{f,k} s_k = \mu_k m g s_k \quad \xrightarrow{(1)} \quad s_k = \frac{v_b^2}{2\mu_k g}.$$

c. Akselerasjonen er konstant og da er $s_k = \langle v \rangle \cdot t_1$, der $\langle v \rangle = \frac{1}{2} v_b$ er gjennomsnittsfarten. Dette gir

$$t_1 = \frac{s_k}{\langle v \rangle} = 2 \frac{s_k}{v_b} = \frac{v_b}{\mu_k g}.$$

Akselerasjonen er $a = F_{f,k}/m = \mu_k g$, og vi kunne alternativt benyttet $v_k(t_1) = v_b = \frac{v_b}{a} = \frac{v_b}{\mu_k g}$.

Eller vi kunne bruke impulsloven og få $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow t_1 = \Delta t = \frac{mv_b}{F_f} = \frac{mv_b}{\mu_k m g} = \frac{v_b}{\mu_k g}$.

d. Transportbåndet har beveget seg en avstand $s_b = v_b t_1 = v_b \frac{v_b}{\mu_k g} = \frac{v_b^2}{\mu_k g}$.

e. Det virker en friksjonskraft $\vec{F}_{f,b}$ mot venstre på bandet fra kartongen (dette iflg. N3: $\vec{F}_{f,b} = -\vec{F}_{f,k}$). Siden bandet forflytter seg mot høyre er arbeidet denne krafta gjør på bandet negativt:

$$W_{f,b} = \vec{F}_{f,b} \cdot \vec{s}_b = -\vec{F}_{f,k} \cdot 2\vec{s}_k = -2F_{f,k}s_k = -2W_{f,k} = -mv_b^2.$$

For at bandet skal holde konstant fart (dvs. $\Delta E_{k,b} = 0$) må det totale arbeidet på bandet være null: $W_{\text{tot},b} = 0$. Dermed må et tilsvarende positivt arbeid $W_{d,b}$ gjøres på bandet via drivhjulene, dvs.

$$W_{d,b} = W_{\text{tot},b} - W_{f,b} = -W_{f,b} = mv_b^2. \quad (2)$$

[Selv om det ikke var spurt etter det, er det interessant å se litt mer eksplisitt på det totale friksjonsarbeidet i dette systemet (band + kartong), gitt som

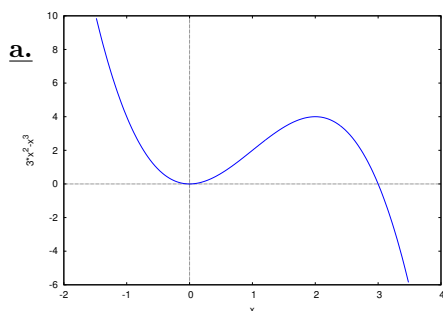
$$\begin{aligned} W_f &= W_{f,b} + W_{f,k} = \vec{F}_{f,b} \cdot \vec{s}_b + \vec{F}_{f,k} \cdot \vec{s}_k \\ &= \vec{F}_{f,k} \cdot (\vec{s}_k - \vec{s}_b) = \vec{F}_{f,b} \cdot (\vec{s}_b - \vec{s}_k) \\ &= -\Delta E_{k,k} < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Den andre linjen viser at det totale friksjonsarbeidet på de to legemene kan skrives som skalarproduktet av friksjonskraften på ett av legemene og forflytningen av det legemet *relativt* til det andre. Dette er som i enklere eksempler gitt i forelesningene, men i de eksemplene var det ene legemet (underlaget) alltid i ro, mens her er underlaget (dvs. bandet) også i bevegelse. Den tredje linjen (som følger ved å sette inn resultater funnet over) viser at det totale friksjonsarbeidet er negativt og har absoluttverdi lik endringen i kinetisk energi av kartongen. Fortegnet på dette arbeidet er som forventet, siden det går til å øke den indre energien i systemet: $\Delta U_{\text{intern}} = -W_f > 0$ (varmetap). Dermed kan vi skrive energien $W_{d,b} = mv_b^2$ som må tilføres som

$$W_{d,b} = \Delta U_{\text{intern}} + \Delta E_{k,k}, \quad (4)$$

med de to leddene på høyre side like store.]

Oppgave 3.



Funksjonen $u(x)$ er vist i figuren til venstre. Nullpunkter for $u(x)$:

$$u(x) = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

Ekstremverdier for $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = 3x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

Vendepunkter for $u(x)$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 6(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

b. Krafta (her en dimensjonsløs størrelse) er definert som

$$f(x) = -\frac{du}{dx} = 3x(x - 2)$$

Dette gir at krafta er positiv for $x < 0$ og $x > 2$ mens den er negativ for $x \in (0, 2)$. Vi ser også dette klart fra kurven, ved at en partikkel vil “falle” til lavere $u(x)$.

c. Når krafta er avledet fra et potensial, er den konservativ. Kan også vise ved integrasjon, der vi velger integrasjon i 3 dimensjoner for prinsipielt å ha muligheter for ulike integrasjonsveger. I 3-dim er $\vec{f}(\vec{r}) = -\nabla u$ men her er $\nabla u = du/dx \hat{i}$ fordi u kun er avhengig av x .

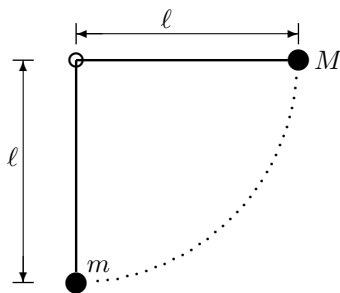
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \frac{du}{dx} dx = - \int_1^2 du = -u(x)|_1^2 = u(1) - u(2).$$

Arbeidet fra 1 til 2 er altså bare avhengig av differansen i potensialet mellom 1 og 2, og altså uavhengig vegen. Krafta er konservativ.

d. Totalenergien $e = k + u = \text{konstant}$. Tenk deg at du slipper en partikkel i potensialfeltet ved en gitt posisjon $x = x_0$ og med null fart, slik at $e = u(x_0)$. Dersom $x_0 \in \langle -1, 2 \rangle$ og dermed $u(x_0) < 4$ vil partikkelen være i en bundet tilstand innenfor dette området. Dersom $x_0 < -1$ og dermed $u(x_0) > 4$ vil E_{tot} være så stor at partikkelen vil fare over ryggen ved $x = 2$, slik at den altså bare er begrenset nedad ved $x = x_0$ men kan gå mot alle store x -verdier. For $x_0 > 2$ vil partikkelen bare bevege seg mer og mer mot stigende x .

e. For $x = 0$ har vi en stabil likevektsposisjon: for en liten endring Δx i en vilkårlig retning vil krafta dytte partikkelen tilbake til likevektsposisjonen. For $x = 2$ har vi en ustabil likevektsposisjon: for en liten endring Δx i en vilkårlig retning vil krafta dytte partikkelen vekk fra likevektsposisjonen, jfr. diskusjonen i d.

Oppgave 4.



a. Energibevaring gir

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgl \Rightarrow \underline{V = \sqrt{2gl}}.$$

Snorkrafta S gitt av Newton 2 med sentripentalakselerasjon oppover:

$$\sum F = S - Mg = MV^2/\ell \Rightarrow \underline{S = Mg + MV^2/\ell = 3Mg}.$$

b. Siden støtet mellom M og m er perfekt elastisk, er både energi og bevegelsesmengde (impuls) bevart. Derved har vi to likninger til bestemmelse av de to ukjente V' og v' . Siden vi regnet V som positiv, innebærer det at hastigheter rettet mot venstre er positive, mens de som er rettet mot høyre er negative. (Vi kunne selvsagt valgt omvendt fortegnskonvensjon, den vi vanligvis bruker). De to likningene er

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad MV &= MV' + mv' && \text{(bevaring bev.mengde)} \\ \text{(II)} \quad MV^2/2 &= MV'^2/2 + mv'^2/2 && \text{(energibevaring - elastisk støt).} \end{aligned}$$

Likningene kan omskrives til

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad M(V - V') &= mv' \\ \text{(II)} \quad M(V - V')(V + V') &= mv'^2 \end{aligned}$$

Vi dividerer så likning (II) med (I) og finner

$$V + V' = v'.$$

Sammen med likning (I), dividert med M , gir denne siste likningen umiddelbart

$$v' = \frac{2V}{1 + m/M} = \frac{2M}{M + m}V,$$

og derved, ved (I),

$$V' = \frac{M - m}{M + m}V.$$

Dersom $m \gg M$ vil vi forvente at M spretter tilbake. I den grensen gir resultatet over $V' = -V$, og $v' = 0$, som forventet. Omvendt, dersom $m \ll M$ vil vi forvente at M fortsetter med (tilnærmet) uendret hastighet etter støtet. Vårt resultat gir, ganske riktig, $V' = V$ i denne grensen (der $v' = 2V$).

c. Snorkreftene etter støtet finnes på samme måte som i a.:

$$S' = Mg + M \frac{V'^2}{\ell} = Mg \left[1 + \frac{V^2}{g\ell} \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 \right] = \underline{Mg \left[1 + 2 \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 \right]},$$

$$s' = mg + m \frac{v'^2}{\ell} = mg \left[1 + \frac{V^2}{g\ell} \left(\frac{2M}{M+m} \right)^2 \right] = \underline{mg \left[1 + 2 \left(\frac{2M}{M+m} \right)^2 \right]}.$$

d.

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,00} \text{ m/s} = 4,43 \text{ m/s} \\ V' &= \frac{M-m}{M+m} V = \frac{10-20}{20+10} \cdot 4,43 \text{ m/s} = -1,48 \text{ m/s} \\ v' &= \frac{2M}{M+m} V = \frac{2 \cdot 10}{20+10} \cdot 4,43 \text{ m/s} = 2,95 \text{ m/s} \\ S &= 3Mg = 3 \cdot 0,0100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,294 \text{ N} \\ S' &= 0,120 \text{ N} \\ s' &= 0,371 \text{ N}. \end{aligned}$$