

TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 6

Oppgave 1.

a. Trehetsmomentet til felgen er:

$$I_f = \int_0^M r^2 dm = \int_0^M R^2 dm = R^2 \int_0^M dm = MR^2.$$

For ei eike bruker vi $dm = m \cdot \frac{dx}{R}$. Eikene roterer om endepunktet, og ei eikes treghetsmoment om endepunktet er

$$I_e = \int_0^M x^2 dm = \frac{m}{R} \int_0^R x^2 dx = \frac{m}{R} \frac{1}{3} R^3 = \frac{1}{3} m R^2.$$

Det totale treghetsmomentet for felgen og de 8 eikene er

$$I = I_f + 8I_e = \left(M + \frac{8m}{3}\right) R^2 = \left(1,00 \text{ kg} + \frac{8}{3} \cdot 0,30 \text{ kg}\right) (0,30 \text{ m})^2 = 0,1620 \text{ kg m}^2 = \underline{0,16 \text{ kg m}^2}$$

b. Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1,00 \text{ Hz} = 6,283 \text{ s}^{-1}$, slik at den kinetiske rotasjonsenergien blir

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1620 \text{ kg m}^2 \cdot (6,283 \text{ s}^{-1})^2 = 3,198 \text{ J} = \underline{3,2 \text{ J}}.$$

Oppgave 2.

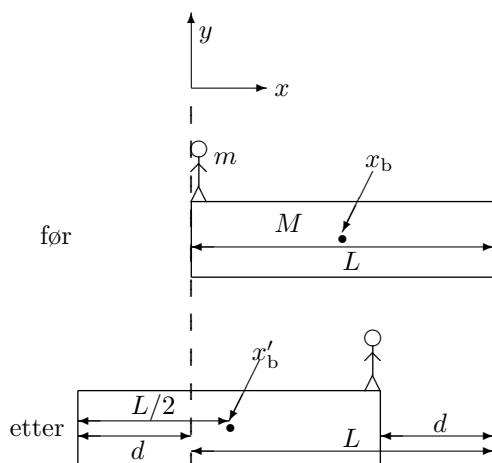
a. Hydrogenatomets masse er m_H og oksygenatomets masse er $m_O = 16 m_H$. Massesenteret er definert som:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Vannmolekylets massesenter blir:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{2 \cdot m_H \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{m_O + 2m_H} = \frac{2 \cdot m_H \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{18 m_H} = \underline{0,068 \cdot d} \\ y_{cm} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \underline{0} \quad \text{Pga. symmetri om } x\text{-aksen} \end{aligned}$$

Vannmolekylets massesenter ligger altså veldig nærme oksygenatomets massesenter.



b. Fordi netto ytre krefter på systemet er lik null, er massesenteret x_{cm} for båt+mann i ro ($0 = \Sigma F_Y = m \cdot dv_{cm}/dt$).

Ved start sitter mannen i den venstre enden av båten ved $x_m = 0$ og båten har koordinat $x_b = L/2$. Massesenteret er

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/2}{m + M} = \frac{ML}{2(m + M)}. \quad (1)$$

Etter mannens forflytning på L til høyre relativt båten har båten flytta seg d til venstre slik at mannens koordinat er $x'_m = L - d$ og båtens koordinat $x'_b = L/2 - d$. Her er d regnet positiv. Da er massesenteret etter forflytningen

$$x'_{cm} = \frac{m \cdot (L - d) + M \cdot (L/2 - d)}{m + M} \quad (2)$$

Massesenteret i ro, $x_{cm} = x'_{cm}$, gir ved å sette likn. (1) lik likn. (2)

$$ML = 2mL - 2md + ML - 2Md$$

$$d = \frac{2mL}{2m + 2M} = \frac{m}{m + M} L = \frac{100}{400} \cdot 10,0 \text{ m} = \underline{2,50 \text{ m}}.$$

Alternativt kan problemet løses på følgende måte: Siden det ikke er ytre krefter er bevegelsesmengden bevart:

$mv = MV$. Her er v er mannens fart og V båtens fart relativt laboratoriesystemet (stille vann) og vi veit at v og V er i motsatt retning og regner derfor disse uten fortegn. Vi kan anta hastighetene er konstant under hele bevegelsen som foregår i en tid t og da er $v = s/t$ og $V = d/t$, der d er lengden båten beveger seg (det søkte svar) og $s = L - d$ er lengden mannen beveger seg. Da får vi

$$mv = MV \Rightarrow ms = Md \Rightarrow m(L - d) = Md \Rightarrow d = \frac{m}{m + M}L = \frac{100}{400} \cdot 10,0 \text{ m} = \underline{2,50 \text{ m}}.$$

Eller, om du tenker enda kjappere: Mannens forflytning og båtens forflytning står i et forhold motsatt til masseforholdet (stor masse gir liten bevegelse): $\frac{\text{båtens } \Delta x}{\text{mannens } \Delta x} = \frac{d}{L-d} = \frac{m}{M}$, som gir samme løsning.

Oppgave 3.

Når raketten ikke utsettes for ytre krefter, viser utledningen gjort i forelesningene at Newtons 2. lov får formen

$$m(t) \frac{dv}{dt} = \beta u_{\text{ex}}, \quad (3)$$

der βu_{ex} er skyvkrafta, med β som forbrenningsraten og u_{ex} eksosgassens relative hastighet.

a. Med oppgitte verdier for forbrenningsraten β og relativ hastighet u_{ex} , blir skyvkrafta

$$\beta \cdot u_{\text{ex}} = 480 \text{ kg/s} \cdot 3,27 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1,57 \cdot 10^6 \text{ N} = 1,57 \text{ MN}.$$

b. Etter forbrenningen er massen redusert til

$$m(t_b) = m_0 - \beta t_b = 2,55 \cdot 10^5 \text{ kg} - 480 \text{ kg/s} \cdot 50 \text{ s} = 2,31 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Kapteinen har ennå mye drivstoff ($181-24=157$ tonn) til rådighet!

c. Hastighetsendringen finnes ved å integrere likn. (3) fra $t = 0$ til $t = t_b$. Med $m(t) = m_0 - \beta t$ gir dette

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^{v(t_b)} dv &= \beta u_{\text{ex}} \int_0^{t_b} \frac{dt}{m_0 - \beta t} = \beta u_{\text{ex}} \left[-\frac{1}{\beta} \ln(m_0 - \beta t) \right]_0^{t_b} \\ v(t_b) - v(0) = \Delta v &= u_{\text{ex}} \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t_b} = 3,27 \text{ km/s} \cdot \ln \frac{2,55}{2,31} = 0,323 \text{ km/s} \quad (= 1163 \text{ km/h}). \end{aligned}$$

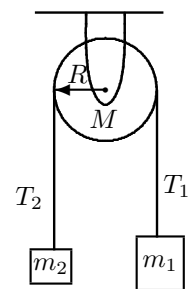
Oppgave 4.

a. Den største massen må nødvendigvis vinne nappetaket her, og m_1 vil derfor akseleres nedover, m_2 oppover: Rotasjon med klokka. Snordraget T_1 må være større enn T_2 siden det er snorene som skal få sving på trinsa med treghetsmomentet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.

b. Velger positiv retning ned for m_1 og opp for m_2 . Ved stram snor må de to massenes akselerasjon være den samme, a . Vi har tre ukjente, a , T_1 , T_2 . Newtons 2. lov for translasjon gir

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (4)$$

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a \quad (5)$$



Periferihastigheten til trinsa er lik snorhastigheten v og vinkelhastigheten er dermed $\omega = v/R$, og følgelig $\alpha = \dot{\omega} = a/R$. Med v pos. ned for m_1 , blir ω og α positiv med klokka. Newton 2 for trinsas rotasjon

$$\tau = (T_1 - T_2)R = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{I_0 \dot{\omega}}{R} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R^2},$$

og dette gir den tredje likningen

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{2}a. \quad (6)$$

De tre ukjente løses f.eks. ved å sette inn uttrykk for T_1 fra (4) og uttrykk for T_2 fra (5) inn i (6):

$$m_1(g - a) - m_2(a + g) = \frac{M}{2}a \Rightarrow a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}. \quad (7)$$

Dette svaret kunne vi nesten ha gjettet, siden den drivende krafta her åpenbart er $m_1 g - m_2 g$ og Newtons 2. for

rotasjon i (6) viser at trinsas effektive trege masse er $M/2$. Innsetting av a i likningene (4) og (5) gir

$$T_1 = m_1(g - a) = g \frac{2m_1m_2 + m_1M/2}{m_1 + m_2 + M/2}, \quad (8)$$

$$T_2 = m_2(a + g) = g \frac{2m_1m_2 + m_2M/2}{m_1 + m_2 + M/2}. \quad (9)$$

c. Når vi lar $M \rightarrow 0$ blir fra (7) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ og fra de to siste likningene $T_1 = T_2$. Stemmer med enkle regninger!

Omvendt, når vi lar $M \rightarrow \infty$ blir $a = 0$ og $T_1 = m_1g$ og $T_2 = m_2g$. Naturligvis, for da er trinsa ikke til å rikke, akselerasjonen må være null og snordragene være gitt av de respektive masser.

Siden begge grensene stemmer med direkte resonnementer, er tilliten til det generelle resultatet betydelig styrket.

d. Idet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ og $\omega = v/R$ blir kinetisk energi

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{4}Mv^2.$$

Energibalanse før = etter:

$$E_p(h) + E_k(h) = E_p(0) + E_k(0) \quad (10)$$

$$E_p(h) - E_p(0) = E_k(0) - E_k(h) \quad (11)$$

Masse 1 faller høyde h og masse 2 stiger høyde h , slik at likn. (11) gir

$$m_1gh + m_2g(-h) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{4}Mv^2 - 0$$

$$v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}},$$

hvor den første kvadratrotta gir “fritt-fall-hastigheten”.

Hvis vi griper fatt i akselerasjonen er den “tidløse” konstant-akselerasjonslikningen cluet: $v^2 - v_0^2 = 2ah$. Med $v_0 = 0$ og a fra (7) gir dette

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}.$$

Den “tidløse likningen” er i praksis identisk med energibevareningslikningen!

Oppgave 5.

a. Vi bruker $\vec{F} = -\nabla U$, som gir komponentene

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2U_0xy^2}{R^4}, \quad (12)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2U_0x^2y}{R^4}. \quad (13)$$

b. Plottet av den potensielle energien er vist i figuren til venstre. Kraften $\vec{F}$ er vist i figuren til høyre. Vektorene representerer $\vec{F}$ i forskjellige punkt (x, y) . Kraftens retning er den samme som vektorens, og kraftens størrelse er proporsjonal med lengden av vektoren.

