

TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 7

Oppgave 1.

a.

Vi ser på de to skivene som et system. I begynnelsen har vi

$$L_z = L_{z,\text{før}} = I_0\omega_i + I_0 \cdot 0 = I_0\omega_i. \quad (1)$$

For å bringe de to skivene i kontakt, flyttes toppskiva nedover langs z -aksen ved hjelp av ytre krefter. Det er i løpet av denne prosessen ingen bevegelse av skiva i x - eller y -retning, og skiva blir heller ikke satt i rotasjon av ytre krefter (friksjonskrefter mellom skivene er indre krefter i systemet). Derfor blir ingen deler av skiva påvirket av en netto ytre kraft med komponenter langs x - og/eller y -retningen. Dermed er netto ytre kraftmoment τ_z på systemet i z -retningen alltid 0. Dermed har vi

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z \text{ er bevart.} \quad (2)$$

Etter at begge skivene har fått samme vinkelhastighet har vi

$$L_z = L_{z,\text{etter}} = I_0\omega_f + I_0\omega_f = 2I_0\omega_f. \quad (3)$$

Siden L_z er bevart har vi

$$L_{z,\text{før}} = L_{z,\text{etter}} \quad \Rightarrow \quad I_0\omega_i = 2I_0\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \underline{\underline{\frac{\omega_i}{2}}} \quad (4)$$

b. Endringen i kinetisk energi er:

$$\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{1}{2} \cdot 2I_0\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_i^2 = I_0\frac{1}{4}\omega_i^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_i^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}I_0\omega_i^2}} \quad (5)$$

Den kinetiske energien har blitt redusert på bekostning av en tilsvarende økning i indre energi (pga. friksjonsarbeidet mellom skivene som ble gjort fra de kom i kontakt til de roterte med samme vinkelhastighet).

Oppgave 2.

a. Trehetsmomentet til skiva er $I_s = \frac{1}{2}MR^2$, og trehetsmomentet til ett prosjektil skutt inn i skiva ved radius r er $I_p = mr^2$. Det totale trehetsmomentet for skiva med n prosjektil blir:

$$I_{\text{tot}} = I_s + nI_p = \underline{\underline{\frac{1}{2}MR^2 + nmr^2}} \quad (6)$$

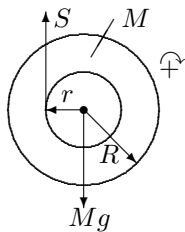
b. Vi ser på skiva pluss prosjektilene som vårt system. Ved starten er det kun prosjektilene som har spinn. Spinnet i vertikalretningen er da gitt av egenspinnet til de n prosjektilene, $L_i = nL_0$ (banespinn til prosjektilene har ingen komponent i vertikalretningen siden vertikalretningen er parallell med hastigheten av massesenteret til prosjektilet). Når prosjektilene treffer skiva, vil skiva starte å rotere. Skiva med n prosjektiler vil få en vinkelhastighet ω_f , så spinnet i vertikalretningen blir $L_f = I_{\text{tot}}\omega_f$. Spinnet langs vertikalretningen er bevart fordi netto ytre kraftmoment på systemet i vertikalretningen er null. (Dette følger fordi netto ytre kraftmoment på skiva er null, og netto ytre kraft på prosjektilene er gitt av tyngdekraften, som virker i vertikalretningen og derfor gir null kraftmoment i vertikalretningen.) Dermed:

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ nL_0 &= I_{\text{tot}}\omega_f \\ \omega_f &= \frac{nL_0}{I_{\text{tot}}} = \underline{\underline{\frac{nL_0}{\frac{1}{2}MR^2 + nmr^2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Oppgave 3.

a. Bevegelsen til jojoen kan sees på som ren rulling vertikalt nedover, med angrepspunktet til snorkrafta som kontaktpunktet mot "underlaget" som det rulles på (her snora). Med henvisning til figuren under ser vi at når jojoen faller nedover roterer den med klokka. Vi velger derfor positiv translasjonsretning nedover og tilhørende positiv rotasjonsretning med klokka. Da blir både v og ω positive, konsistent med rullebetingelsen $v = r\omega$ (siden r er en positiv størrelse). Tidsderivasjon av denne gir $a = r\alpha$, som kan brukes til å eliminere vinkelakselerasjonen α . To ukjente størrelser gjenstår da: akselerasjonen a til massesenteret og snorkrafta S . Vi kan sette opp følgende

ligninger for disse:



altså

$$\text{Newton 2 translasjon:} \quad \Sigma F = Mg - S = Ma$$

$$\text{Newton 2 rotasjon:} \quad \Sigma \tau = r \cdot S = I \alpha,$$

$$Mg - S = Ma \quad (8)$$

$$rS = I \cdot \frac{a}{r}. \quad (9)$$

Uttrykk for S fra første likning innsatt i andre og løsning mhp. a gir

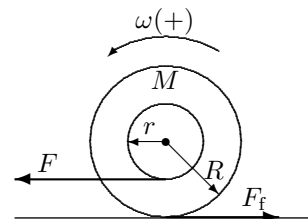
$$a = g \cdot \frac{1}{1 + I/(Mr^2)} = g \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}MR^2/(Mr^2)} = \underline{g \cdot \frac{2}{2 + R^2/r^2}}. \quad (10)$$

Akselerasjonen er altså uavhengig av jojoens masse (som for et legeme i fritt fall). Snordraget derimot er avhengig av massen, fra likn. (8) og (10) får vi

$$S = M(g - a) = Mg \left(1 - \frac{2}{2 + R^2/r^2} \right) = \underline{Mg \frac{1}{1 + 2r^2/R^2}}.$$

b. Vi antar at jojoen beveger seg mot venstre, som medfører rotasjon mot klokka (se figur). Velger derfor i alle algebraiske likninger positiv retning mot venstre og tilhørende positiv omdreiningsretning mot klokka. (Dersom våre antagelser er feil vil dette komme til uttrykk i svarene som negative verdier for akselerasjon og vinkelakselerasjon.)

Siden jojoen ruller rent på underlaget vil friksjonskrafta F_f være statisk. Det er da ikke nødvendig å vite retningen til friksjonskrafta på forhånd; den vil komme ut av utregningen. Vi *antar* derfor bare en retning; la oss anta at friksjonskrafta peker mot høyre.



Rotasjonen blir om massesenteret, derfor beregnes kraftmomentet relativt dette. Snordraget gir et *negativt* kraftmoment $-Fr$, siden det forsøker å dreie jojoen *med* klokka. Friksjonskrafta F_f har *positivt* kraftmoment $+F_f R$, siden den forsøker å dreie jojoen *mot* klokka.

Ut fra disse betraktningene gir Newtons 2. lov for rotasjon

$$F_f R - Fr = I_0 \dot{\omega} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\omega}. \quad (11)$$

På den annen side gir Newtons 2. for tyngdepunksbevegelsen (positiv venstre),

$$F - F_f = M\ddot{X} = M\dot{V} = MR\dot{\omega}, \quad (12)$$

der X er x -koordinaten til jojoens c.m. (positiv retning mot venstre). I siste overgang brukte vi betingelsen for ren rulling mot underlaget: $V = R\omega$. De to ukjente i likningene (11) og (12) er F_f og $\dot{\omega}$. Vi kan selvsagt eliminere F_f mellom disse to ligningene, for derved å finne akselerasjonen $a = R\dot{\omega}$:

$$a = \frac{F R(R - r)}{MR^2 + I_0}.$$

Siden $R > r$ er $a > 0$, så jojoen beveger seg som antatt mot venstre. Videre, for å finne uttrykket for F_f som funksjon av F , eliminerer vi $\dot{\omega}$ i likningene (11) og (12):

$$\begin{aligned} F - F_f &= MR\dot{\omega} = \frac{2}{R} \cdot (F_f R - Fr) = 2F_f - 2Fr/R \\ \Rightarrow F_f &= \frac{F}{3R} \cdot (R + 2r). \end{aligned}$$

Vi ser at $F_f > 0$, så friksjonskrafta peker som antatt mot høyre. Siden F_f er en statisk friksjonskraft er $|F_f| \leq \mu_s N$, der normalkraften $N = Mg$. Den maksimale verdien F kan ha før jojoen begynner å skli er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{F_{\max}}{3R} \cdot (R + 2r) &= \mu_s Mg \\ \Rightarrow F_{\max} &= \mu_s Mg \frac{3R}{R + 2r}. \end{aligned}$$

Oppgave 4.

a. Med I_0 treghetsmomentet om tyngdepunktet og $d = L/2$ avstand fra tyngdepunktet til A blir stavens treghetsmoment om A:

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

b. Staven er i ro før kollisjonen slik at spinnet er null for denne. Totalt spinn om A er derfor lik kulas spinn om A like før kollisjonen. Størrelsen på spinnet er

$$L_{\text{før}} = L_{\text{kule}} = |\vec{r}_{\text{kule}} \times \vec{p}_{\text{kule}}| = p_{\text{kule}} \cdot \ell = mv\ell$$

(siden v er i retning normalt på armen ℓ) og retningen er ut av papirplanet.

For at vi skal ha bevart spinn om A må summen av ytre kraftmoment om A være null eller neglisjerbar mens kollisjonen pågår. Krafta på staven fra akslingen i A gir null kraftmoment siden armen er null. Kraftmomentet på kula pga. tyngden er også null under kollisjonen fordi da er kulas posisjon vertikalt under A, slik at armen er null også for tyngdekrafta. (Sagt på en annen måte: kraftmomentet fra tyngden er $\vec{r} \times m\vec{g}$ der krafta $m\vec{g}$ peker vertikalt nedover og $\vec{r}$ er posisjonsvektoren til kula relativt A. Under kollisjonen peker $\vec{r}$ også vertikalt, så $\vec{r} \times m\vec{g} = 0$.) Dermed er ytre kraftmoment om A null, så spinnet om A er bevart.

c. Like etter kollisjonen har staven vinkelhastighet ω_0 og dermed spinn $L = I\omega_0$, mens kula har spinn $m(v/2)\ell$. Bevaring av spinn om A gir

$$\begin{aligned} L_{\text{etter}} &= L_{\text{før}} \\ I\omega_0 + mv/2 \cdot \ell &= mv\ell \\ \omega_0 &= \frac{mv\ell/2}{I} = \frac{mv\ell/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{v\ell}{L^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

d. Bevegelsesmengden til systemet (kule + stav) like før kollisjonen er i horisontalretningen (x -retningen) og er lik

$$p_{\text{før}} = mv$$

(kun kula bidrar siden staven er i ro). Bevegelsesmengden til systemet like etter kollisjonen er også i horisontalretningen og er lik

$$p_{\text{etter}} = \frac{1}{2}mv + M\omega_0 \frac{L}{2}.$$

Her brukte vi at bidraget fra staven kan skrives $MV_{\text{cm},x}$ der $V_{\text{cm},x}$ er hastigheten til stavens massesenter i x -retningen, gitt ved $V_{\text{cm},x} = \omega_0(L/2)$ siden stavens massesenter ligger midt på staven. Setter vi inn for ω_0 som vi fant i c. får vi at endringen i systemets bevegelsesmengde i kollisjonen er

$$\Delta p = p_{\text{etter}} - p_{\text{før}} = \left(\frac{3}{2} \frac{\ell}{L} - 1\right) \frac{1}{2}mv. \quad (14)$$

Vi ser at $\Delta p \neq 0$ (for generelle verdier av ℓ/L), så bevegelsesmengden er ikke bevart. Den er heller ikke approksimativt bevart, siden Δp er ikke neglisjerbar (dvs. Δp er ikke proporsjonal med den meget korte tiden Δt kollisjonen tar). Det må derfor ha virket en ytre kraft av betydelig størrelse ($\propto 1/\Delta t$) på systemet (stav + kule) i horisontalretningen under kollisjonen. Dette må være en kraft på staven fra akslingen ved A (det er ingen andre kandidater). Definer F_a som middelverdien av denne horisontalkraften over tiden Δt kollisjonen varte. Da er

$$F_a \Delta t = \Delta p. \quad (15)$$

Fortegnet på F_a er altså det samme som fortegnet på Δp . Fra (14) følger det da at F_a virker mot venstre for $\ell < 2L/3$ og mot høyre for $\ell > 2L/3$ ($\ell = 2L/3$ er et spesialtilfelle: da er $F_a = 0$ så bevegelsesmengden er bevart.)

(Den følgende diskusjonen i redusert skriftstørrelse er inkludert for dem som ønsker en mer detaljert forståelse av kraften fra akslingen.) Disse resultatene kan illustreres ved et enkelt eksperiment: Legg staven på gulvet (dette "eliminerer" vertikalretningen i den opprinnelige geometrien, som er helt uproblematisk siden kun krefter i horisontalretningen er av betydning for endringen av bevegelsesmengde i kollisjonen) og gi den et spark vinkelrett på staven i en avstand ℓ fra opphengingspunktet A på staven (dvs. den enden staven ville hengt fra dersom den var opphengt). Kraften fra sparket representerer kraften fra kula når den treffer staven. Du vil se at dersom du sparker nær A, dvs. ℓ liten i forhold til L , vil A bevege seg i sparkretningen, så for at A skulle ha ligget i ro måtte det i tillegg ha virket en tilstrekkelig stor kraft på A mot sparkretningen (denne tilleggskraften representerer kraften fra akslingen). Dersom du sparker nær den andre enden av staven, dvs. $\ell \approx L$, vil A derimot bevege seg mot sparkretningen, så da måtte tilleggskraften ha virket med sparkretningen. Dette stemmer med fortegnet på F_a som funksjon av ℓ diskutert over.

Det går også an å finne F_a ved direkte utregning. Når staven henger vertikalt og blir truffet av kula, gjelder følgende ligninger for staven: (1) Newtons 2. lov for akselerasjonen $a_{\text{cm},x}$ til stavens massesenter i x -retningen:

$$F_k + F_a = Ma_{\text{cm},x}$$

der F_k er kraften fra kula (positiv, siden den virker mot høyre). (2) Newtons 2. lov for vinkelakselerasjonen α for staven

om en akse (med fast retning) som går gjennom stavens massesenter:

$$F_k(\ell - L/2) - F_a(L/2) = I_{\text{cm}}\alpha,$$

der vi har valgt positiv rotasjonsretning mot klokka, og $I_{\text{cm}} = (1/12)ML^2$ er stavens treghetsmoment om aksene gjennom cm. (Både tyngdekraften og *vertikalkomponenten* av kraften på staven fra akslingen har null arm og bidrar derfor ikke til kraftmomentet.) (3) Betingelsen at opphengingspunktet A skal forbli i ro, som betyr at akselerasjonen til A, som er gitt som $a_{\text{cm},x} - \alpha(L/2)$, skal være 0, dvs.

$$a_{\text{cm},x} = \frac{L}{2}\alpha$$

(dette tilsvarer “ren rulling” av staven, med A som kontaktpunktet mot “underlaget” det rulles på). Løsning av ligningssettet gir uttrykk for de tre ukjente F_a , $a_{\text{cm},x}$ og α . Her er vi bare interessert i F_a , som blir

$$F_a = \left(\frac{3}{2}\frac{\ell}{L} - 1\right)F_k.$$

Dette resultatet reproducerer konklusjonene vi fant tidligere ang. retningen på F_a som funksjon av ℓ . Vha. (14) og (15) gir dette videre

$$F_k\Delta t = \frac{1}{2}mv. \quad (16)$$

Siden F_k er krafta på staven fra kula, er (via N3) krafta på kula fra staven $-F_k$, og vi har også at $\Delta p_{\text{kule}} = -\frac{1}{2}mv$. Dermed (ved å multiplisere ligningen med -1) ser vi at (16) sier at endringen av kulas bevegelsesmengde er lik krafta på kula multiplisert med Δt , helt som forventet.

e. Stavens bevegelse etter kollisjonen analyseres lettest ved å bruke at energien er konserverert under bevegelsen. (Under kollisjonen var energien *ikke* konserverert!) Den kinetiske energien er i dette tilfellet ren rotasjonsenergi. I tillegg kommer den potensielle energien i tyngdefeltet. Derved har vi:

$$E(\text{bunn}) = E(\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg \cdot \frac{1}{2}L(1 - \cos\theta),$$

der vi har brukt at stavens tyngdepunkt alltid har avstanden $\frac{1}{2}L$ fra omdreiningsaksen A. Herfra følger

$$\omega(\theta) = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{MgL}{I}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{\omega_0^2 - 3\frac{g}{L}(1 - \cos\theta)}. \quad (17)$$

f. Ved maksimum utslag er $\omega(\theta) = 0$. Når dette skjer ved $\theta = 90^\circ$, finner vi

$$\omega_0^2 \stackrel{(17)}{=} \frac{3g}{L} \stackrel{(13)}{\implies} \left(\frac{3mv\ell}{2ML^2}\right)^2 = \frac{3g}{L} \Rightarrow v = \frac{2M}{m}\frac{L}{\ell}\sqrt{\frac{gL}{3}}.$$

g. Når staven igjen passerer vertikal posisjon, etter å ha svingt ut 90° , er igjen $\omega^2 = \omega_0^2 = 3g/L$. Da virker på stanga vertikalkreftene Mg (nedover) og F_A (oppover) fra akslingen, som tilsammen gir sentripetalakselerasjonen for tyngdepunktet (med posisjon $L/2$ fra aksene) sin sirkelbevegelse:

$$\sum F = F_A - Mg = Ma_c = M\left(\omega_0^2 \cdot \frac{L}{2}\right) = M\left(\frac{3g}{2}\right) \Rightarrow \underline{F_A = \frac{5}{2}Mg}.$$