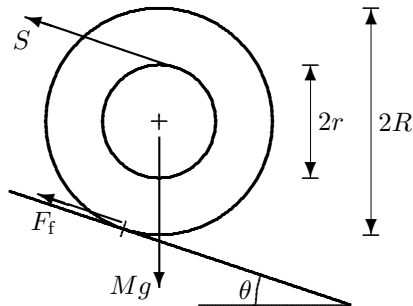


TFY4108 Fysikk

Løsningsforslag for øving 8

Oppgave 1.



a. Her har vi fire ukjente: θ_0 , S , F_f , F_N . Dette krever fire likninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder Newton 1:

$$\text{Normalt skråplan: } \sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow F_N = Mg \cos \theta \quad (\text{I})$$

$$\text{Langs skråplan: } \sum F_{\parallel} = 0 \Rightarrow Mg \sin \theta = F_f + S \quad (\text{II})$$

hvor F_f er friksjonskrafta.

$$\text{Rotasjonslikevekt om sentrum: } \sum \tau = 0 \Rightarrow S r = F_f R \quad (\text{III})$$

$$\text{Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense: } F_f \leq \mu_s F_N = \mu_s Mg \cos \theta \quad (\text{IV})$$

Ved grensa $\theta = \theta_0$ – dvs. der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynne å rulle/slure – er friksjonskrafta lik det maksimale: $F_f = \mu_s Mg \cos \theta_0$.

Likning (III) gir $S = (R/r)F_f$ som settes inn i likn. (II) og gir

$$Mg \sin \theta_0 - F_f - (R/r)F_f = 0 \quad (1)$$

Innsetting i dette av grenseverdien av F_f gir ei likning for θ_0 :

$$Mg \sin \theta_0 = \mu_s Mg \cos \theta_0 (1 + R/r) \Rightarrow \tan \theta_0 = \mu_s (1 + R/r), \quad (2)$$

og dermed

$$\theta_0 = \arctan [\mu_s (1 + R/r)], \quad (3)$$

og snorkrafta

$$S = \frac{R}{r} F_f = \frac{R}{r} \mu_s Mg \cos \theta_0, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{mgR}{r+R} \sin \theta_0 = Mg (\sin \theta_0 - \mu_s \cos \theta_0). \quad (4)$$

b. Når snella har begynt å slure, må likn. (II) og (III) erstattes av Newtons 2. lov. Vinkelen er nå gitt lik $\theta (\geq \theta_0)$, og de fire ukjente blir: a , S_1 , F_f , F_N . Snorkrafta blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol, og akselerasjonen a langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskrafta nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_k :

$$F_f = \mu_k F_N = \mu_k Mg \cos \theta. \quad (5)$$

Likning (I) bestemmer F_N og likn. (5) bestemmer F_f , slik at vi har igjen bare to ukjente, a og S_1 . To likninger:

$$\text{Newton 2 translasjon langs skråplan: } \sum F_{\parallel} = Ma \Rightarrow Mg \sin \theta - F_f - S_1 = Ma \quad (\text{IIb})$$

$$\text{Newton 2 rotasjon om sentrum: } \sum \tau = I\dot{\omega} \Rightarrow -F_f R + S_1 r = I\dot{\omega} \quad (\text{IIIb})$$

der I = treghetsmomentet om hjulaksen. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokka (= den retningen der virkelig går). Når snella rutsjer nedover rulles snora ut med hastighet $v = \omega r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot{\omega} = \dot{v}/r = a/r$. N2-likningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for F_f):

$$Mg \sin \theta - F_f - S_1 = Ma \quad (6)$$

$$-F_f R + S_1 r = I (a/r). \quad (7)$$

To likninger og to ukjente (a og S_1). Eliminerer S_1 fra likn. (6) og setter inn i likn. (7):

$$S_1 = Mg \sin \theta - F_f - Ma \xrightarrow{(7)} -F_f R + Mgr \sin \theta - F_f r = I (a/r) + Mar. \quad (8)$$

Løsning av a , litt smarte divisjoner og innsetting av F_f gir

$$a = g \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta (1 + \frac{R}{r})}{1 + I/(Mr^2)}. \quad (9)$$

Oppgave 2.

a. Rotasjonen er med klokka, så høyrehåndsregelen gir at z -aksen peker inn i planet. z -komponenten av systemets totalspinn blir

$$\begin{aligned} L_z &= I_0\omega + m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1)_z + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)_z = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{v}{R} + m_1Rv + m_2Rv \\ &= \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)Rv, \end{aligned}$$

der vi brukte at farten v til m_1 og m_2 er den samme som farten ωR ytterst på trinsa. Derivasjon av uttrykket for L_z mhp. t gir

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)Ra.$$

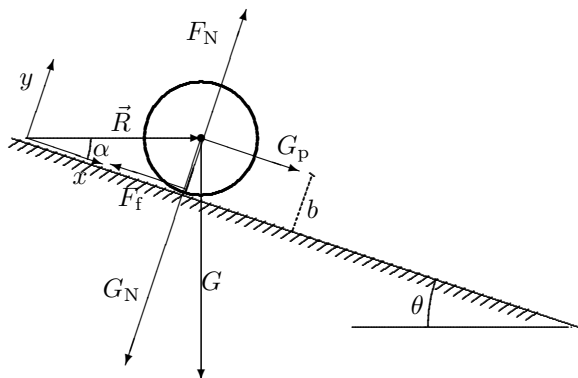
b. De ytre kreftene som virker på systemet er: (i) tyngdekrafta på trinsa som virker i massesenteret på aksa, (ii) normalkrafta på trinsa som også virker på aksa (og balanser tyngdekrafta), (iii) tyngdekrafta på m_1 , (iv) tyngdekrafta på m_2 . Armen om rotasjonsaksen er 0 for de to første kreftene og R for de to siste. Kraftmomentet $\vec{r}_1 \times m_1\vec{g}$ på m_1 peker inn i planet, så bidraget til τ_z blir $+Rm_1g$, mens kraftmomentet $\vec{r}_2 \times m_2\vec{g}$ på m_2 peker ut av planet, så bidraget til τ_z blir $-Rm_2g$. Dermed blir

$$\tau_z = (m_1 - m_2)gR.$$

c. Vi bruker at $\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$. Innsetting av uttrykkene funnet i a og b gir

$$\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)Ra = (m_1 - m_2)gR \Rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}.$$

Oppgave 3.



a. Tyngdens normalkomponent $G_N = mg \cos \theta$ nulles ut av normalkrafta F_N fra skråplanet på kula. Nettokrafta kulas vekt gir, er derfor parallellkomponenten $G_P = mg \sin \theta$. I tillegg virker friksjonskrafta F_f parallelt med planet oppover, nettokraft nedover, altså $mg \sin \theta - F_f$.

b. Poenget med å velge referansepunktet på selve skråplanet er at friksjonskraftas kraftmoment (dreiemoment) $\vec{r} \times \vec{F}_f$ blir lik null fordi $\vec{r}$ er parallell med $\vec{F}_f$. I tillegg gir $\vec{F}_N$ og $\vec{G}_N$ motsatt like stort kraftmoment og nulles derfor ut. Dermed er det bare $\vec{G}_P$ som bidrar til kraftmomentet.

c. Kraftmomentet for $\vec{G}_P$ er $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{G}_P$ og peker langs *negativ* z -akse (dvs. inn i planet; se figur). $\vec{G}_P$ angriper i kulas tyngdepunkt og har om origo en arm b uansett hvor kula er plassert, slik at

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{G}_P = (-\hat{z}) \cdot \overbrace{R \sin \alpha}^{=b} \cdot G_P = -\hat{z} b \cdot mg \sin \theta.$$

d. Når kula ruller nedover vil vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ og dermed også egenspinnet $I\vec{\omega}$ peke i $-\hat{z}$ -retning. Banespinnnet $\vec{R} \times m\vec{V}$ peker også i negativ z -retning. Totalspinnet blir

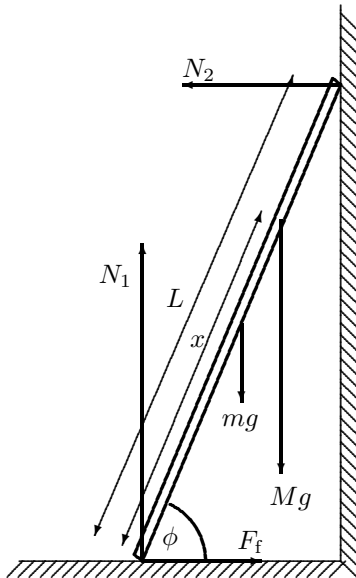
$$\vec{L} = m\vec{R} \times \vec{V} + I_0\vec{\omega} = -\hat{z} \left[mbV + \frac{2}{5}mb^2(V/b) \right] = -\hat{z} \frac{7}{5}mbV.$$

e. Newtons 2. lov for rotasjon, $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ gir

$$bmg \sin \theta = \frac{7}{5}mb\dot{V} = \frac{7}{5}mba \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \theta.$$

Translasjonsakselerasjonen blir mindre enn for friksjonsfri bevegelse (da er $a = g \sin \theta$) fordi en del av den potensielle energien omsettes til kinetisk rotasjonsenergi (andel 2/7) og ikke bare translasjonsenergi (andel 5/7).

Oppgave 4.



Vi ser på stige + maler som vårt system. Vi har tre ukjente ytre krefter (se figuren): N_1 , N_2 og F_f , og trenger derfor tre likninger. Vi har to likninger fra Newton 1 i x - og y -retning (når vi lar figuren definere xy -planet):

$$N_1 = (M + m)g \quad ; \quad N_2 = F_f,$$

og den tredje likning fra rotasjonslikevekt (Newton 1 rotasjon), der vi velger referansepunktet i kontaktpunktet mellom stigen og underlaget. Alle kreftenes dreiemomenter er rettet langs $\pm z$ -aksen, og vi velger positiv rotasjonsretning mot klokka. N_2 har arm $L \sin \phi$, mg arm $L/2 \cdot \cos \phi$ og Mg arm $x \cos \phi$. Dette gir oss

$$N_2 L \sin \phi - Mgx \cos \phi - mg \cdot \frac{1}{2} L \cos \phi = 0.$$

Av likningene følger at

$$N_2 = F_f = \frac{1}{\tan \phi} \left[(x/L)M + \frac{1}{2}m \right] g$$

og siden betingelsen for at stigen ikke skal skli er at

$$F_f \leq \mu_s N_1 = \mu_s (M + m)g,$$

følger kravet vi skulle vise:

$$\tan \phi \geq \frac{(x/L)M + \frac{1}{2}m}{\mu_s (M + m)}.$$

b. Med de oppgitte tallene innsatt, finner vi

$$\frac{(x/L)M + \frac{1}{2}m}{\mu_s (M + m)} = \frac{(9/10) \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot 12}{\mu_s \cdot 92} = \frac{0,848}{\mu_s}$$

$$\mu_s = 0,50 \quad \Rightarrow \quad \tan \phi \geq 1,70 \quad \Rightarrow \quad \phi \geq 60^\circ$$

$$\mu_s = 0,40 \quad \Rightarrow \quad \tan \phi \geq 2,12 \quad \Rightarrow \quad \phi \geq 65^\circ$$

$$\mu_s = 0,30 \quad \Rightarrow \quad \tan \phi \geq 2,83 \quad \Rightarrow \quad \phi \geq 71^\circ$$

c. Vel, her er det grunn til å være forsiktig. Ikke overvurder friksjonskoeffisienten! Det er også grenser for hvor steilt stigen kan stå, det er ikke spesielt moro å falle bakover heller. Stigeklatreren må derfor sørge for at friksjonskoeffisienten er stor nok i utgangspunktet. Både nedre og spesielt øvre enden av stigen bør sikres.