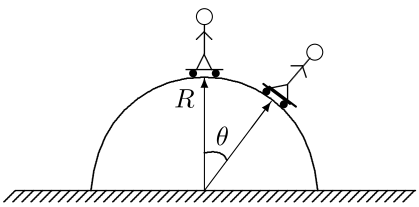
TFY4108 Fysikk
Øving 9

NB! Denne øvingen gjør bruk av Matlab og er **obligatorisk**. Innleveringsfristen er derfor forlenget med én uke. (Å utsette arbeidet med øvingen er ikke anbefalt, fordi øving 10 vil ha innleveringsfrist samme dag som denne.)

Veiledning: Tysdag 22. okt. og tysdag 29. okt. kl. 10:15-12:00.
Innlevering: Fredag 1. nov. kl. 14:00.

Veiledningen vil foregå i de vanlige grupperommene. Siden disse ikke er datasaler må du ta med deg bærbar PC med Matlab eller Octave installert for å få gjort de numeriske delene av øvingen. Litt Matlab-hjelp finner du på neste side og i tips-fila.

Oppgave.



Del I:

En sprø rullebrettentusiast balanserer på toppen av St. Paul katedralen, som danner en halvkuleformet kuppel med radius R. Han har en masse m, tyngdeakselerasjonen er g og friksjon neglisjeres. Likevekten er ustabil, og som følge av en liten ustøhet, begynner han å rulle nedover flata. (Vi skal imidlertid se bort fra rotasjonen til hjulene, så anta glibevegelse uten friksjon.)

Under bevegelsen er akselerasjonen ikke konstant. Det er enkelt å analysere problemet analytisk med energilikninger, og det skal du gjøre først. Deretter skal du sette opp bevegelseslikningene. Disse er vanskelige å løse analytisk, så derfor skal du løse disse numerisk ved å skrive et lite program i Matlab.

Analytisk:

a. Bruk energibetraktninger til å finne et uttrykk for farten v som funksjon av vinkelen θ. (Anta at vinkelen er liten nok til at brettet ikke har lettet fra kuppelen, jf. b. under.)

b. Finn et uttrykk for $F_{\mathrm{N}}(\theta)$, dvs. normalkrafta mellom brettet og underlaget. Ved hvilken vinkel θ_0 vil brettkjøreren lette fra kuppelen? Og hva er hastigheten v_0 da? Finn tallverdi for v_0 når $R = 50\,\mathrm{m}$.

Med Matlab:

c. Med $\omega = \dot{\theta} = v/R =$ vinkelhastigheten og $\alpha = \dot{\omega} = a/R =$ vinkelakselerasjonen blir bevegelseslikningene på differensiell form:

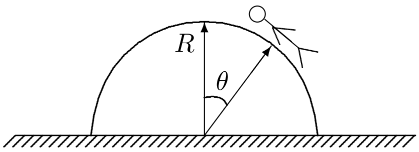
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g\sin\theta}{R} \quad , \qquad \mathrm{d}\omega = \alpha \cdot \mathrm{d}t \quad , \qquad \mathrm{d}\theta = \omega \cdot \mathrm{d}t\,.$$

Løs disse likningene ved numerisk integrasjon. Gjør dette ved å iterere likningene i et Matlab-program. Finn α, θ, ω og f_{N} for hvert tidssteg (her har vi definert $f_N = F_N/m$, som er hensiktsmessig siden massen m blir bare en proporsjonalitetskonstant i alle kreftene som inngår). Plott resultatet for θ, ω og f_{N} som funksjon av tida. Plott også α, ω og f_{N} som funksjon av θ og drøft om resultatet stemmer med det analytiske resultatet i a.

Bruk tallverdier: $R = 50\,\mathrm{m}$, $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ og skriv inn alle størrelser i SI-enheter.

Legg i programmet ditt inn en mulighet for å finne ved hvilken vinkel θ_0 brettkjøreren vil lette fra kuppelen. Stemmer svaret med det analytiske du fant i b?

Del II:



En takarbeider har et oppdrag på toppen av samme katedralen. Arbeideren er usikret, tipper overende, greier ikke å klamre seg fast og glir nedover taket. Arbeideren har masse m og friksjonskoeffisienten mellom arbeideren og taket er $\mu_k = \mu_s = \mu$.

Med Matlab:

d. Løs problemet ved å ta utgangspunkt i Matlab-programmet ditt ovenfor. Du trenger bare små tillegg i programmet ved å legge inn en friksjonskoeffisient `my` som en ny variabel og en friksjonskraft som bidrar til lavere vinkelakselerasjon α. Varier verdien for μ og se om resultatet er rimelig. For $\mu = 0$ skal resultatet bli som ovenfor. Skriv ut resultatet for f.eks. $\mu = 0,30$.
HINT: Du må starte simuleringen ved en vinkel som er stor nok til at arbeideren glir, dvs. $\tan\theta > \mu$.

Analytisk:

e. Sett opp uttrykk for energibalanse over en liten forflytning $d\theta$ for arbeideren og kom slik fram til en differensiallikning som beskriver sammenhengen mellom v og θ langs kuleoverflata. Uten å løse differensiallikningen, bruk den til å gi en (alternativ) utledning av glibetingelsen $\tan\theta > \mu$.

Hjelp for numerisk løsning av difflikning med Matlab.

Prinsippet ved numerisk løsning av differensiallikningene er å anta at du kjenner verdiene for en viss tid t og så beregner hva verdiene må være ved tid $t + dt$ på grunnlag av de differensielle bevegelseslikningene.

For $\alpha, \theta, \omega, f_N$ og t velger du i Matlab matriser (vektorer) med foreslåtte navn `alfa, theta, omega, fN` og `time`. La `i` være løpeparameteren: `theta(i)` osv. Det kan være gunstig å bruke en WHILE-løkke til iterasjonene. Det faste tidsintervallet dt kan du kalle `deltaT` og velge f.eks. lik 0.01 (prøv gjerne med ulike tider og se om resultatet blir forskjellig).

Før du går inn i WHILE-løkka må du initialisere alle verdier ved `time(1)=0`. Brettkjøreren starter på toppen med en liten ustøhet, som du kan simulere ved å starte med vinkelen `theta(1)=0.01` mens starthastigheten `omega(1)` kan være null. OBS: Hvis du starter iterasjonen på toppen (`theta(1)=0`) vil WHILE-løkka bli uendelig fordi på toppen er $\alpha = 0$ og $\omega = 0$, dvs. ingen bevegelse. (Utilsiktede uendelige løkker kan du unngå ved å legge inn en test i WHILE-løkka som avbryter den dersom antall iterasjoner overstiger en viss maxverdi. Denne bør velges tilstrekkeleg stor slik at avbrytelsen kun skjer dersom programmet har en feil.)

Tallverdi for alle størrelser angir du konsekvent i standard SI-enheter, dvs. rad, rad/s, s osv.

De oppsatte bevegelseslikningene gjelder ikke lenger når brettkjøreren har lettet fra underlaget, så du bør stoppe simuleringen når det skjer. Når løkka er fullført, plott resultatet som angitt i oppgaven. Her er et forslag til plotting av to grafer ved siden av hverandre:

```
subplot(1,2,1);  % theta, omega, fN s.f.a. time
plot( time,theta*180/pi, time,omega*180/pi,':', time, fN,'-.'); % Vise vinkel og vinkelfart i grader
title('\theta og \omega som funksjon av tid')
xlabel('t/s'); ylim([0 90]);
legend('\theta/grader', '\omega/(grader\cdot s^{-1})',  'f_N/(N/kg)', 'location','north');
subplot(1,2,2); % omega, alfa, fN s.f.a. theta
... tilsvarende over.
```

Rapportering av enkelte tallverdier til skjermen kan gjøres f.eks. ved

```
fprintf(1,'fN=0 n{\aa}r i=%i t=%5.2f theta=%5.2f\n',i, time(i), theta(i)*180/pi);
```

Utvalgte fasitsvar:
a: $v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$, b: $F_N = mg(3\cos\theta - 2)$; $\theta_0 = 48°$, $v_0 = 65$ km/h