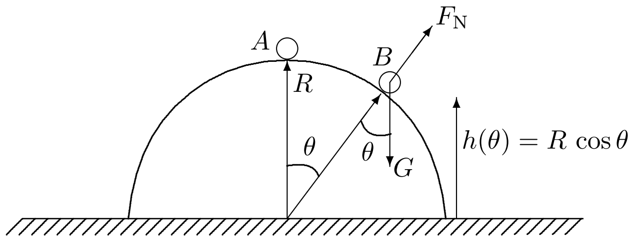
TFY4108 Fysikk
Løsningsforslag for øving 9

Oppgave 1.



a. Energibevarelse for posisjon A og B gir:

$$\begin{aligned} E_{\rm A} &= E_{\rm B} \\ E_{\rm p,A} + E_{\rm k,A} &= E_{\rm p,B} + E_{\rm k,B} \\ mgR + 0 &= mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \\ v(\theta) &= \underline{\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}} \qquad (1) \end{aligned}$$

b. De kreftene som virker på mannen i posisjon B er tyngden G og normalkrafta $F_{\rm N}$, som vist i figuren. Newtons 2. lov i radiell retning gir idet hastigheten fra likn. (1) settes inn:

$$\begin{aligned} G\cos\theta - F_{\rm N} &= \frac{mv^2}{R} && (2) \\ F_{\rm N} &= mg\cos\theta - \frac{m}{R}2gR(1-\cos\theta) \\ F_{\rm N} &= \underline{mg(3\cos\theta - 2)} && (3) \end{aligned}$$

Brettkjøreren vil lette fra underlaget når $F_{\rm N}(\theta_0) = 0$, fra likning (3):

$$mg(3\cos\theta_0 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 48,2^\circ = \underline{48^\circ}\,,$$

og da er hastigheten fra likn. (1):

$$v(\theta_0) = \sqrt{2gR\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9,81\cdot 50}\ \mathrm{m/s} = 18,1\,\mathrm{m/s} = \underline{65\,\mathrm{km/h}}\,.$$

c. Den tangentielle komponenten av $\vec{G}$ gir baneakselerasjon $a = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$ og da blir de infinitesimale bevegelseslikningene for θ, vinkelhastighet ω og vinkelakselerasjon α som følger

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g\sin\theta}{R} \quad , \qquad \mathrm{d}\omega = \alpha\cdot\mathrm{d}t \quad , \qquad \mathrm{d}\theta = \omega\cdot\mathrm{d}t\,. \qquad (4)$$

Før vi starter ei WHILE-løkka må verdier initialiseres. Dette kan gjøres samtidig med å sette faste variable:

```
g = 9.81;
R = 50; % Kuleradius
pihalf = pi/2; % Maks vinkel, 90 grader. Eg. unoedvendig naar test FN>0
deltaT = 0.01; % Valgt tidsintervall. Boer vaere max 0.02
% Initialiseringer av array:
time(1) = 0.0;
theta(1) = 0.01; % Minstevinkel
omega(1) = 0.0;
fN(1) = g*cos(theta(1));  % Normalkraft per masse
alfa(1) = g*sin(theta(1))/R; % Vinkelakselerasjon
i = 1; imax = 20/deltaT;  %imax for aa stoppe evt. uendelig loekke
```

Vi lager ei WHILE-løkke der vi tester om normalkrafta per masse $f_{\rm N} > 0$, der vi bruker $f_{\rm N}$ fra likn. (2): $f_{\rm N} = g * \cos\theta - \omega^2 * R$. I løkka tester vi også på `imax` for å hindre en uendelig løkke, som er lett å ende opp i hvis det er noe feil i programmet. Test på $\theta < \pi/2$ er unødvendig hvis testen på $f_{\rm N}$ fungerer. Løkka med iterasjon fra t til $t + \mathrm{d}t$ kan gjøres slik:

```
while (fN(i)>=0 & theta(i)<pihalf & i<imax)
  omega(i+1) = omega(i) + alfa(i)*deltaT; % Ny vinkelfart, bruker alfa fra forrige loop
  theta(i+1) = theta(i) + omega(i)*deltaT;  % Ny vinkel.
  fN(i+1) = g*cos(theta(i+1)) - omega(i+1)*omega(i+1)*R; % Normalkraft per masse
  alfa(i+1) = g*sin(theta(i+1))/R;  % Vinkelakselerasjon
  time(i+1) = deltaT*i;
  i = i+1;
end
```

Det totale program er vist nedenfor i pkt. d, der også friksjon er inkludert. I programmet er det ved `printf(1,.....)` gjort utskrift til skjermen. Resultatet av utskriften er:

```
my=0.00  deltaT=0.010 imax=2000
fN=0 naar i=1164 time=11.63 theta(grader)=48.19 omega=0.362 v=18.09
```

Vinkelen og farten stemmer med hva funnet i b.: $\theta_0 = 48,2^\circ$ og $v_0 = v(\theta_0) = 18{,}1$ m/s.

d. Med friksjon μ blir det bare små modifikasjoner på likninger gitt ovenfor uten friksjon. For bevegelseslikningene (4) er det kun uttrykk for akselerasjonen som må reduseres for friksjonskrafta μF_{N}:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g\sin\theta - \mu f_{\mathrm{N}}}{R}. \tag{5}$$

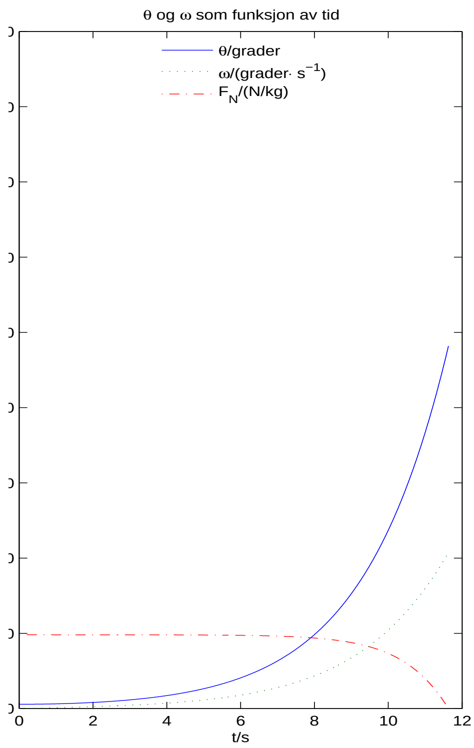
Iterasjonene må starte først ved en vinkel hvor tyngden overvinner friksjonen: $mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta$, dvs. $\tan\theta > \mu$ og i programmet: `theta(1) = atan(my)+0.01`. Her er det totale programmet, der vi kan legge inn verdier for `my` som vi må ønske:

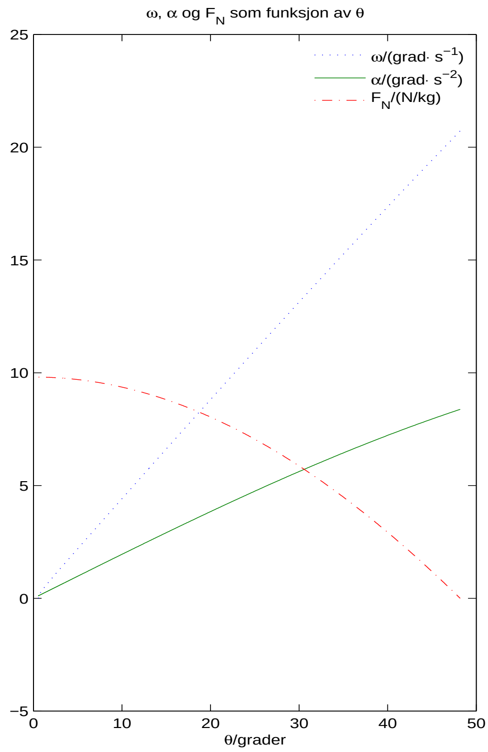
```
% Skli paa halvkule med friksjon my
%
clear; % Nullstille alle variabler og deres dimensjoner
% Sette verdier til faste variable, alle i SI-enheter:
my = 0.5; % Skriv inn valgt friksjonskoeffisient her!!
g = 9.81;
R = 50; % Kuleradius
pihalf = pi/2; % Maks vinkel, 90 grader. Eg. unoedvendig n{\aa}r test fN>0
deltaT = 0.01; % Valgt tidsintervall. Boer vaere max 0.02
% Initialiseringer av array:
time(1) = 0.0;
theta(1) = atan(my)+0.01; % Minstevinkel for krav til aa starte aa gli
omega(1) = 0.0;
fN(1) = g*cos(theta(1));  % Normalkraft per masse
alfa(1) = g*sin(theta(1))/R - my*fN(1)/R; % Vinkelakselerasjon
i = 1; imax = 20/deltaT;  %imax for aa stoppe evt. uendelig loekke
while (fN(i)>=0 & theta(i)<pihalf & i<imax)
  omega(i+1) = omega(i) + alfa(i)*deltaT; % Ny vinkelfart, bruker alfa fra forrige loop
  theta(i+1) = theta(i) + omega(i)*deltaT;  % Ny vinkel.
  fN(i+1) = g*cos(theta(i+1)) - omega(i+1)*omega(i+1)*R; % Normalkraft per masse
  alfa(i+1) = g*sin(theta(i+1))/R - my*FN(i+1)/R;  % Vinkelakselerasjon
  time(i+1) = deltaT*i;
  i = i+1;
end
figure(1);
subplot(1,2,1);
plot( time, theta*180/pi,time, omega*180/pi,':', time, fN,'-.'); % Vise vinkel og vinkelfart i grader
title('\theta og \omega som funksjon av tid')
xlabel('t/s'); ylim([0 90]);
handle=legend('\theta/grader', '\omega/(grader\cdot s^{-1})',  'f_N/(N/kg)', 'location','north');
set(handle, 'Box', 'off'); % Ikke boks rundt legend
subplot(1,2,2);
plot( theta*180/pi,omega*180/pi,':', theta*180/pi,alfa*180/pi,'-',  theta*180/pi, fN,'-.')
title('\omega, \alpha og f_N som funksjon av \theta')
xlabel('\theta/grader');
handle=legend('\omega/(grader\cdot s^{-1})', '\alpha/(grader\cdot s^{-2})', 'f_N/(N/kg)', 'location', 'northeast')
set(handle, 'Box', 'off');
% Rapportere noen verdier til skjermen:
fprintf(1,'my=%4.2f  theta(1)=%5.2f deltaT=%5.3f imax=%i\n', my, theta(1)*180/pi, deltaT, imax);
fprintf(1,'fN=0 n{\aa}r i=%i t=%5.2f theta=%5.2f omega=%5.3f v=%5.2f \n\n',
                              i, time(i), theta(i)*180/pi, omega(i)*180/pi, omega(i)*R);
```

Resultater med figurer på neste side.

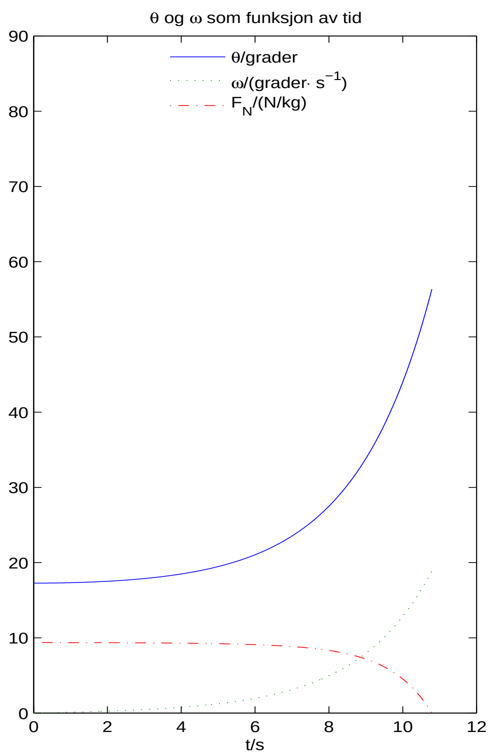
Matlab-resultater med figurer for $\mu = 0,0$ og $\mu = 0,3$ (`theta` og `omega` i hhv. grader og grader per sekund):

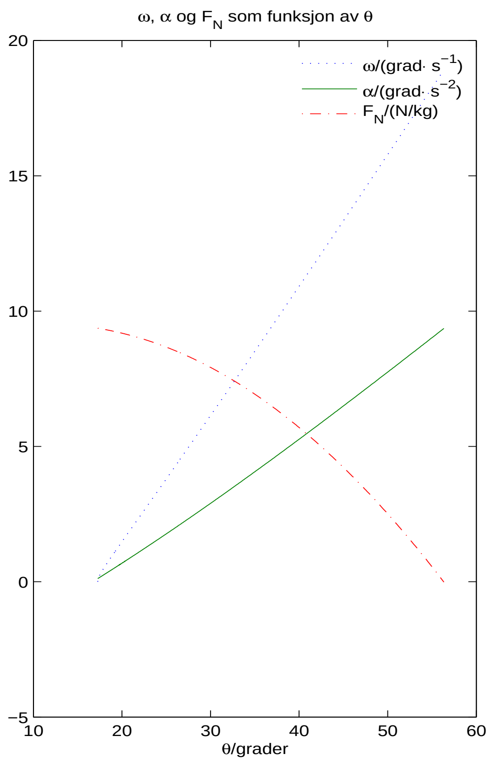
```
my=0.00  theta(1)= 0.57 deltaT=0.010 imax=2000
fN=0 naar i=1164 t=11.63 theta=48.19 omega=20.72 v=18.09
```






```
my=0.30  theta(1)=17.27 deltaT=0.010 imax=2000
fN=0 naar i=1080 t=10.79 theta=56.35 omega=18.91 v=16.50
```





e. Nå må friksjonsarbeidet inngå i energibevarelsen, og friksjonsarbeidet ved en forflytning $\mathrm{d}\theta$ er

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{f}} = \vec{F}_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\mu F_{\mathrm{N}} \cdot R\,\mathrm{d}\theta = -\mu\left(mg\cos\theta - mv^2/R\right) \cdot R\,\mathrm{d}\theta\,,$$

der normalkrafta $F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta - mv^2/R$ er fra likn. (2). Endring i potensiell energi er $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}(mgh)$ der høyden er $h = R\cos\theta$ slik at høydeforskjell ved forflytning $\mathrm{d}\theta$ blir $\mathrm{d}h = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$. Energibalansen kan da settes opp:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(mgh) + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \mathrm{d}W_{\mathrm{f}} \\
mg\,\mathrm{d}h + mv\,\mathrm{d}v &= -\mu\left(mg\cos\theta - mv^2/R\right) \cdot R\,\mathrm{d}\theta \\
g\left(-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) + v\,\mathrm{d}v &= \left(-\mu gR\cos\theta + \mu v^2\right)\,\mathrm{d}\theta \\
v\,\mathrm{d}v &= \left(gR\sin\theta - \mu gR\cos\theta + \mu v^2\right)\,\mathrm{d}\theta\,. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Diff.likningen (6) er vanskelig å separere i de to avhengig variable v og θ og må løses med å multiplisere med integrerende faktor. Løsning er ikke nødvendig i dette fysikkemnet, men har du bakgrunnen fra matematikk er det bare å sette i gang. Her: `http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4145/diverse/FriksjonKuleFuglstad.pdf` finner du en løsning av fys.mat.-studenter, som løser diff.likningen ved å bruke integrerende faktor $e^{-2\mu\theta}$ og viser at ved $\mu = 0,30$ letter arbeideren fra underlaget ved $56°$, som stemmer med simuleringen i d.

Når vinkelen θ øker (dvs. $d\theta > 0$) øker brettkjørerens hastighet v, dvs. $dv > 0$. Vi ser fra differensiallikningen at dette impliserer

$$gR\sin\theta - \mu gR\cos\theta + \mu v^2 > 0\,.$$

Glibevegelsen starter fra null hastighet. Dersom vi setter $v \to 0$ i uttrykket over får vi derfor en betingelse for startvinkelen:

$$gR\sin\theta > \mu gR\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta > \mu\,,$$

som er kravet til at kroppen i det hele tatt skal gli. Med $\mu = 0,30$ skjer dette først når $\theta = \arctan 0,30 = 17°$. Så arbeideren har altså litt å redde seg på!