

TFY4108 Fysikk

Øving 10

Rettleing: Tysdag 29. okt. kl. 10:15-12:00.

Innlevering: Fredag 1. nov. kl. 14:00.

Oppgåve 1.

Ved tida $t = 0$ har ein partikkel bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ A \frac{b-x}{b-a} & \text{for } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (1)$$

der A , a , og b er konstanter.

(a) Normalisér Ψ (dvs. finn A uttrykt ved a og b).

(b) Skissér $\Psi(x, 0)$ som funksjon av x .

(c) Kvar har partikkelen størst sannsynlegheit for å bli funnen ved $t = 0$?

(d) Kva er sannsynlegheiten for å finne partikkelen til venstre for a (dvs. i regionen $x < a$)? Sjekk resultatet ditt for spesialtilfella $b = a$ og $b = 2a$.

(e) Kva er forventningsverdien til x ? Sjekk resultatet ditt for spesialtilfellet $b = 2a$.

Oppgåve 2. Stasjonære tilstander for partikkel i boks: Forventningsverdi og uvisse for x og p

I denne oppgåva skal du rekne ut forventningsverdien og uvisse til dei to fysiske storleikane ("observablane") x (posisjon) og p (bevegelsesmengd) i dei stasjonære tilstandene for ein partikkel i ein boks. Under oppsummerer vi dei viktigaste resultatane og uttrykka som trengst for denne oppgåva (merk spesielt uttrykka for $\langle p \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$; desse vil bli diskuterte i forelesinga måndag 28/10).

Forventningsverdien til ein fysisk observabel F er $\langle F \rangle$ og uvisse til F er $\Delta F = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}$. Vi treng difor uttrykk for $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$. For ei stasjonær tilstand $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ er desse uttrykka tidsuavhengige og gitt av

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\psi(x)|^2, \quad (2)$$

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x), \quad (3)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\psi(x)|^2, \quad (4)$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x). \quad (5)$$

For ein partikkel i ein boks med lengde L avheng dei stasjonære tilstandene av eit positivt heiltal $n = 1, 2, 3, \dots$ og har romdel gitt ved

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{for } 0 < x < L, \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L. \end{cases} \quad (6)$$

(a) Rekn ut $\langle x \rangle$. Er svaret rimeleg?

(b) Rekn ut $\langle p \rangle$. Er svaret rimeleg?

(c) (i) Rekn ut $\langle x^2 \rangle$ og vis at $\Delta x = L\sqrt{1/12 - 1/(2\pi^2 n^2)}$.

(ii) Med utgangspunkt i n -avhengigheiten av $|\psi_n(x)|^2$, gi ein kvalitativ forklaring for at Δx aukar med n .

(iii) I grensa $n \rightarrow \infty$ ser vi at $\Delta x \rightarrow L\sqrt{1/12}$. Argumenter at i denne grensa er sannsynlegheitsfordelinga essensielt uniform og bruk dette til å gi ein alternativ utleiing av grenseverdien for Δx .

(d) Rekn ut $\langle p^2 \rangle$ og finn så Δp .

(e) Heisenbergs uvisserelasjon for x og p seier at

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (7)$$

i alle tilstander. Bruk uttrykka du har funne for Δx og Δp i (c) og (d) til å vise at uvisserelasjonen er tilfredsstilt for dei stasjonære tilstandene for partikkel i boks. For kva tilstand er $\Delta x \Delta p$ minst?

Utvalde fasitsvar:

1a: $|A| = \sqrt{3/b}$; 1e: $\langle x \rangle = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$.

2a: $\langle x \rangle = L/2$; 2b: $\langle p \rangle = 0$; 2d: $\Delta p = \hbar\pi n/L$.