Inst. fysikk 2013

TFY4108 Fysikk
Øving 11

Rettleiing: Tysdag 5. nov. kl. 10:15-12:00.
Innlevering: Fredag 8. nov. kl. 14:00.

Oppgåve 1.

Sjå på bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,t) = A\, e^{-amx^2/\hbar} e^{-iat} \tag{1}$$

der m er partikkelmassen og a er ein foreløpig uspesifisert positiv konstant.

(a) Normalisér bølgjefunksjonen (dvs. bestem konstanten A uttrykt ved dei andre parametrane i Ψ).

(b) Vis at for ein bestemt verdi av a er $\Psi(x,t)$ ei løysing av den tidsavhengige Schrödingerlikninga (TASL) for ein partikkel med potensiell energi $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Er denne løysinga ein stasjonær tilstand?

******

Oppgåve 2 og 3 under er om ein partikkel i ein uendeleg djup potensialbrønn (dvs. "partikkel i boks"). Dei stasjonære tilstandene $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$ for dette problemet har

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{for } 0 \le x \le L, \\ 0 & \text{for } x \le 0 \text{ og } x \ge L \end{cases} \tag{2}$$

og

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\, n^2, \tag{3}$$

med $n = 1, 2, 3, \ldots$ Her er L breidden på brønnen og m er massen til partikkelen. Funksjonane $\psi_n(x)$ er ortonormale, dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi_n^*(x)\psi_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{for } m = n \\ 0 & \text{for } m \ne n \end{array} \right\} \equiv \delta_{n,m}. \tag{4}$$

Oppgåve 2.

Ein partikkel i ein uendeleg djup potensialbrønn (dvs. "partikkel i boks") har ved tida $t = 0$ bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]. \tag{5}$$

(a) Normalisér $\Psi(x,0)$ (dvs. bestem konstanten A). Plott/skissér $\Psi(x,0)$ og $|\Psi(x,0)|^2$.

(b) Finn $\Psi(x,t)$ og $|\Psi(x,t)|^2$.

(c) Finn $\langle x\rangle$. Du skal få at $\langle x\rangle$ oscillerer harmonisk med tida omkring midtpunktet i brønnen. Kva er amplituden og vinkelfrekvensen til oscillasjonen?

(d) Finn $\langle p\rangle$.

(e) Dersom ein måler energien til partikkelen, kva er dei mogelege verdiane ei slik måling kan gi? Kva er sannsynlegheiten for kvar av dei?

(f) Finn $\langle E\rangle$.

Oppgåve 3.

Ein partikkel i ein uendeleg djup potensialbrønn (dvs. "partikkel i boks") har ved tida $t = 0$ bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & \text{for } 0 \le x \le L/2 \\ A(L-x) & \text{for } L/2 \le x \le L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{6}$$

(a) Normalisér $\Psi(x,0)$ (dvs. bestem konstanten A). Plott/skissér $\Psi(x,0)$ og $|\Psi(x,0)|^2$.

(b) Finn $\Psi(x,t)$.

(c) Kva er sannsynlegheiten for at ei måling av energien til partikkelen gir verdien E_1?

(d) Finn $\langle E\rangle$.

Utvalde fasitsvar:

1b: $a = \omega/2$.
2a: $A = 1/\sqrt{2}$; 2b: $\Psi(x,t) = A[\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}]$; 2c: $\langle x\rangle = \frac{L}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right]$.
3a: $A = \sqrt{12/L^3}$; 3b: $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$ med $c_n = 4\sqrt{6}(-1)^{(n-1)/2}/(\pi n)^2$ for $n = 1,3,5,\ldots$ og $c_n = 0$ for $n = 2,4,6,\ldots$ 3c: $96/\pi^4 \approx 0.986$. 3d: $\langle E\rangle = 6\hbar^2/(mL^2)$.