Institutt for fysikk 2013

TFY4108 Fysikk
Øving 12

Rettleiing: Tysdag 12. nov. kl. 10:15-12:00.
Innlevering: Fredag 15. nov. kl. 14:00.

Oppgåve 1.

Sjå på ein partikkel med masse m og energi E som kjem inn mot ein rektangulær potensialbarriere med høgd U_0. Med utgangspunkt i uttrykka for transmisjonskoeffisienten T som funksjon av E gitt i forelesingane (sjå fila "tunnelering-2013.pdf" tilgjengeleg på heimesida under "Forelesingsmateriale")

(a) Vis at når totalenergien $E < U_0$, minkar T eksponensielt med barrierelengda L for store nok L (meir presist når argumentet αL til sinh-funksjonen i uttrykket for T er $\gg 1$).

(b) Anta at partikkelen er eit elektron ($m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg) og at barrieren har høgde $U_0 = 5$ eV og lengde $L = 1$ nm. Plott T som funksjon av E for $E > U_0$. Har du nokre kommentarar (spesielt ang. korleis oppførselen skil seg frå klassisk fysikk)?

Oppgåve 2.

Sjå på ein partikkel med masse m i eit éindimensjonalt system med potensiell energi gitt av

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ U_0 & \text{for } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

med $U_0 > 0$.

Anta først at partikkelen har ein total energi $E > U_0$.

(a) Kva er samanhengen mellom energien E og de Broglie bølgjelengda λ når i) $x < 0$ og (ii) $x > 0$?

(b) Set opp løysingane for den tidsuavhengige Schrödingerlikninga (TUSL) for $x \leq 0$ og $x > 0$. Forklar korleis dei skal skøytast saman ved $x = 0$.

(c) For kva verdi av E/U_0 er $R = T$? Her er R refleksjonskoeffisienten til ei planbølgje som kjem inn frå venstre, og T er transmisjonskoeffisienten.

Heretter skal vi i staden sjå på tilfellet $E < U_0$.

(d) Kva blir R og T i dette tilfellet?

(e) Anta vidare at partikkelen er eit elektron, dvs. $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg. Dersom $U_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ eV og $E = \frac{9}{10} U_0$, kva blir typisk inntrengjingsdjupn for partikkelen i potensialbarrieren?

Oppgåve 3.

Anta at ein partikkel i ein boks med lengde L er preparert slik at bølgjefunksjonen er gitt av

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1(x,t) + \frac{1}{2} \Psi_2(x,t) + \frac{1}{2} \Psi_3(x,t) \tag{2}$$

der $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ er bølgjefunksjonen for ein stasjonær tilstand med kvantetal n ($n = 1, 2, \ldots$). Du kan anta som kjent at settet av funksjonar $\psi_n(x)$ er ortonormalt, dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi_n^*(x) \psi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{dersom } n = m \\ 0 & \text{dersom } n \neq m \end{cases} \tag{3}$$

(a) Vis at bølgjefunksjonen er normalisert, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\Psi(x,t)|^2 = 1$.

(b) Kva er sannsynlegheiten for at ein måling av energien skal gi verdien E_n ($n = 1, 2, \ldots$)?

(c) Anta at ei slik energimåling gir måleresultatet E_2. Dersom ein ved ei seinare tid gjer ei måling av posisjonen til partikkelen, kva er sannsynlegheiten for å måle denne til å vere mellom $x = L/4$ og $x = 3L/4$?

Utvalde fasitsvar:
1a: $T \approx 16(E/U_0)(1 - E/U_0)e^{-2\alpha L}$.
2c: $E/U_0 = 9/8$.
3c: $1/2$.