TFY4108 Fysikk
Løysingsforslag for øving 12

Oppgåve 2.

(a) Bølgjefunksjonen $\Psi(x,t)$ er på forma

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \Psi_n(x,t) \tag{1}$$

der $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ er ein stasjonær tilstand med kvantetal n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Normeringskravet er

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = 1. \tag{2}$$

Innsetjing av uttrykket for $\Psi(x,t)$ gir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_n c_n^* \Psi_n^*(x,t)\right)\left(\sum_m c_m \Psi_m(x,t)\right) \\
&= \sum_n \sum_m c_n^* c_m \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_n^*(x,t)\Psi_m(x,t) = \sum_n \sum_m c_n^* c_m e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\psi_m(x)}_{\delta_{nm}} \\
&= \sum_n c_n^* c_n e^{-i(E_n - E_n)t/\hbar} = \sum_n |c_n|^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Normeringskravet (2) er altså ekvivalent med

$$\sum_n |c_n|^2 = 1. \tag{4}$$

Ved direkte samanlikning av koeffisientane i den oppgjevne bølgjefunksjonen $\Psi(x,t)$ med den generelle forma (1) ser ein at her er $c_1 = 1/\sqrt{2}$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1/2$ og $c_n = 0$ for $n \geq 4$. Dermed blir

$$\sum_n |c_n|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1, \tag{5}$$

som viser at normeringskravet er tilfredsstilt.

(b) Sannsynlegheita $P(E_n)$ for å måle energien E_n er gitt som $P(E_n) = |c_n|^2$, der $\{c_n\}$ er koeffisientane i (1).[1] Merk at ved å bruke normeringskravet på forma (4) følgjer det at

$$\sum_n P(E_n) = 1, \tag{6}$$

som uttrykkjer at målinga gjev med vissheit (dvs. sannsynlegheit 1) ein eller annan av dei tillatte verdiane E_n (ein naudsynt eigenskap for ein sannsynlegheitsfordeling). For vår bølgjefunksjon blir

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= |c_1|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}, && (7)\\
P(E_2) &= |c_2|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, && (8)\\
P(E_3) &= |c_3|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, && (9)\\
P(E_n) &= |c_n|^2 = 0^2 = 0 \text{ for } n \geq 4. && (10)
\end{aligned}$$

(d) Dersom måleresultatet er E_2, vil, iflg. del (iii) av målepostulatet, bølgjefunksjonen umiddelbart etter målinga vere gjeven av den tilhøyrande eigenfunksjonen $\psi_2(x)$ til Hamiltonoperatoren (energioperatoren) $\hat{H}$. Dersom vi definerer tida umiddelbart etter målinga som $t = 0$, har vi altså

$$\Psi(x,0) = \psi_2(x). \tag{11}$$

Bølgjefunksjonen ved ei seinare tid t er då

$$\Psi(x,t) = \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}. \tag{12}$$

Sannsynlegheita for å måle posisjonen til å vere mellom $x = L/4$ og $x = 3L/4$ finn vi ved å bruke tolkinga av bølgjefunksjonen: $|\Psi(x,t)|^2 dx$ er sannsynlegheita for å måle posisjonen mellom x og $x + dx$. Dermed blir svaret på

[1] Grunngjevinga for dette er diskutert i kap. 11 og 13 (rundt likning (75)) i kvantesupplementet.

spørsmålet

$$\begin{aligned}\int_{L/4}^{3L/4} dx\, |\Psi(x,t)|^2 &= \int_{L/4}^{3L/4} dx\, |\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{L}\int_{L/4}^{3L/4} dx\ \sin^2(2\pi x/L) = \frac{2}{L}\cdot\frac{L}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dy\, \sin^2 y \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(y-\sin y\cos y)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{2\pi}\cdot(3\pi/2-0-(\pi/2-0)) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Svaret er uavhengig av t, sidan tilstanden er stasjonær.

Oppgåve 3.

(a) Når $E < U_0$ er transmisjonskoeffisienten

$$T(E) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{U_0^2}{E(U_0-E)}\cdot\sinh^2\alpha L} = \frac{\frac{E}{U_0}(1-\frac{E}{U_0})}{\frac{E}{U_0}(1-\frac{E}{U_0})+\frac{1}{4}\sinh^2\alpha L} \tag{14}$$

der $\alpha = \sqrt{2m(U_0-E)/\hbar^2}$. Vi har $\sinh\alpha L = \frac{1}{2}(e^{\alpha L}-e^{-\alpha L}) = \frac{1}{2}e^{\alpha L}(1+e^{-2\alpha L})$. Når $\alpha L \gg 1$ er $e^{-2\alpha L} \ll 1$, så vi kan approksimere $\sinh\alpha L \approx \frac{1}{2}e^{\alpha L}$. Dette gir

$$T(E) \approx \frac{\frac{E}{U_0}(1-\frac{E}{U_0})}{\frac{E}{U_0}(1-\frac{E}{U_0})+\frac{1}{16}e^{2\alpha L}} \approx 16\frac{E}{U_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)e^{-2\alpha L}. \tag{15}$$

I den siste overgangen brukte vi at det første leddet i nemnaren (som har maxverdi 1/4) kan neglisjerast i forhold til det andre leddet.

(b) Når $E > U_0$ er transmisjonskoeffisienten

$$T(E) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{U_0^2}{E(E-U_0)}\sin^2 KL} \tag{16}$$

der $K = \sqrt{2m(E-U_0)/\hbar^2}$. La oss introdusere den dimensjonslause parameteren $\epsilon = E/U_0$ og skrive

$$KL = L\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}\sqrt{\epsilon-1} \equiv \frac{L}{\ell}\sqrt{\epsilon-1} \tag{17}$$

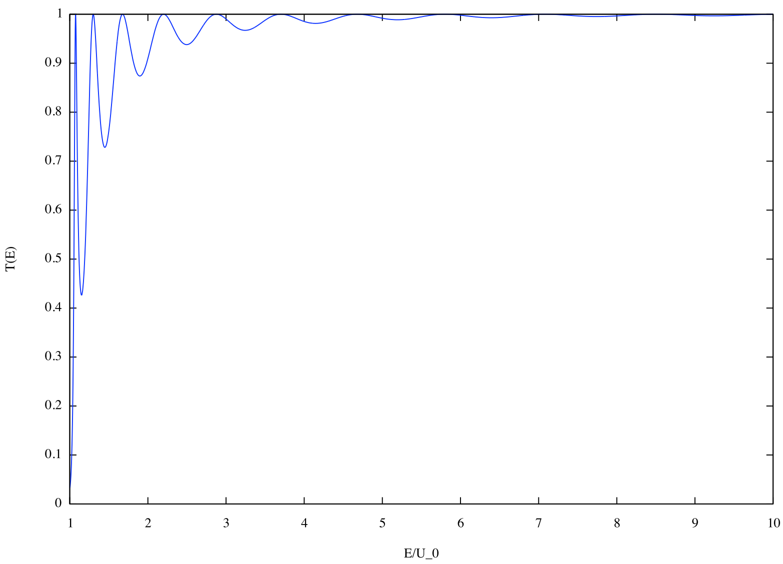
der $\ell \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$ har dimensjon lengde. Dermed kan vi skrive

$$T(E) = \frac{1}{1+\frac{1}{4\epsilon(\epsilon-1)}\sin^2\left(\frac{L}{\ell}\sqrt{\epsilon-1}\right)}. \tag{18}$$

Med $m = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg får vi

$$\ell = \frac{6.63\cdot 10^{-34}}{2\pi\sqrt{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\cdot 1.60\cdot 10^{-19}\,U_0(\mathrm{eV})}}\ \mathrm{m} = \frac{1.95\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{U}_0(\mathrm{eV})}} = \frac{0.195\,\mathrm{nm}}{\sqrt{\mathrm{U}_0(\mathrm{eV})}} \tag{19}$$

der $U_0(\mathrm{eV})$ betyr den numeriske verdien av U_0 i elektronvolt. Eit plott av $T(E)$ for $U_0 = 5$ eV og $L = 1$ nm er vist i figuren under. Dersom oppførselen til elektronet hadde vore gjeven av klassisk fysikk ville transmisjonskoeffisienten ha vore lik 1 for alle $E > U_0$. Plottet viser betydelege avvik frå klassisk oppførsel opp til ganske høge energiar.



Oppg. 1

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ A(L-x) & L/2 \le x \le L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

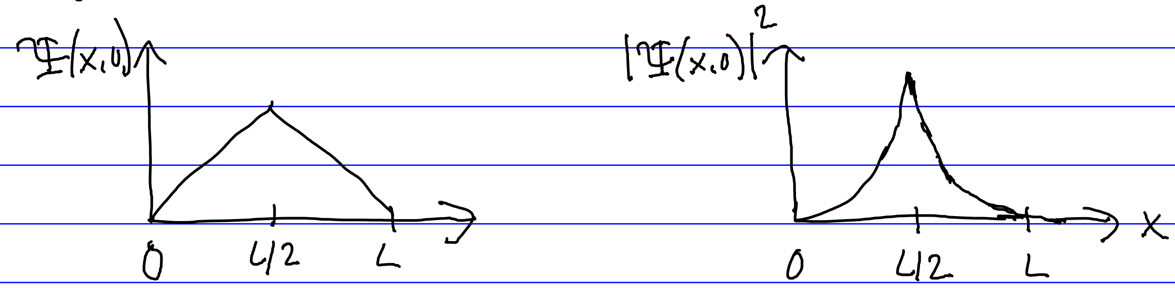
(a) Den enklaste måten å normalisere $\Psi(x,0)$ er å merke seg at $\Psi(x,0)$ er same funksjon som i øving 10, oppg. 3, berre med ei litt anna parametrisering. Definerer vi $\tilde{A} = \frac{L}{2} A$ kan vi skrive $\Psi(x,0)$ på forma brukt der:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \tilde{A}\,\frac{x}{L/2} \\ \tilde{A}\,\frac{L-x}{L/2} \\ 0 \end{cases}$$

Vi fann i øving 10 at

$$\tilde{A} = \sqrt{\frac{3}{L}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{2}{L}\tilde{A} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{3}{L}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{12}{L^3}}}}$$

Skjematisk:



(b) $$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}$$

med $$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\, \Psi(x,0)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{12}{L^3}}\left[\int_0^{L/2} dx\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot x + \int_{L/2}^{L} dx\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)(L-x)\right]$$

Integral av typen $\int_a^b dx\, x \sin qx$ (bruk delvis integrasjon)

$$= -x \frac{1}{q} \cos qx \Big|_a^b - \left(-\frac{1}{q}\right) \int_a^b dx \cos qx$$

$$= \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q} \sin qx - x \cos qx \right) \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\sqrt{24}}{L^2} \left[\frac{L}{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} - x \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^{L/2} \right.$$

$$+ L \left(- \frac{L}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{L/2}^{L} - \frac{L}{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} - x \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{L/2}^{L} \Big]$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{L^2} \left[\frac{L}{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \cancel{\frac{L}{2} \cos \frac{n\pi}{2}} \right) - \frac{L^2}{n\pi} \left(\cancel{\cos n\pi} - \cancel{\cos \frac{n\pi}{2}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{L}{n\pi} \left(-\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \cancel{L \cos n\pi} + \cancel{\frac{L}{2} \cos \frac{n\pi}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{96}}{(\pi n)^2} \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right)$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2 n^2} \cdot \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} = c_n$$

(La oss sjekke at $\sum_n |c_n|^2 = 1$:

$$\sum_n |c_n|^2 = \frac{96}{\pi^4} \underbrace{\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^4}}_{= \pi^4/96} = \underline{1}, \text{ ok})$$

(c) Sannsynlegheita for å måle verdien E_1 for energien er

$$|c_1|^2 = \frac{96}{\pi^4} \simeq 0.986$$

(d) $$\langle E \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{96}{\pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot n^2$$

$$= \frac{48\hbar^2}{\pi^2 mL^2} \cdot \underbrace{\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2}}_{\pi^2/8} = \underline{\underline{\frac{6\hbar^2}{mL^2}}}$$

Merk: $$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \simeq 4.93 \frac{\hbar^2}{mL^2}$$

så $\langle E \rangle > E_1$, som den må vere sidan også ledd med $n > 1$ er med i $\Psi(x,t)$. Men $\langle E \rangle$ er ikkje mykje større enn E_1, som er rimeleg sidan $|c_1|^2 \simeq 0.986$ er veldig nær 1, så ledd med $n > 1$ har lita vekt.