Institutt for fysikk 2014

TFY4108 Fysikk
Øving 12

Rettleiing: Tysdag 11. nov. kl. 12:15-14:00.
Innlevering: Fredag 14. nov. kl. 14:00.

Oppgåve 1.

Ein partikkel i ein uendeleg djup potensialbrønn (dvs. "partikkel i boks") har ved tida $t = 0$ bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & \text{for } 0 \leq x \leq L/2 \\ A(L-x) & \text{for } L/2 \leq x \leq L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Normalisér $\Psi(x,0)$ (dvs. bestem konstanten A). Plott/skissér $\Psi(x,0)$ og $|\Psi(x,0)|^2$.

(b) Finn $\Psi(x,t)$.

(c) Kva er sannsynlegheita for at ei måling av energien til partikkelen gir verdien E_1?

(d) Finn $\langle E\rangle$.

Oppgåve 2.

Anta at ein partikkel i ein boks med lengde L er preparert slik at bølgjefunksjonen er gitt som

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x,t) + \frac{1}{2}\Psi_2(x,t) + \frac{1}{2}\Psi_3(x,t) \tag{2}$$

der $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$ er bølgjefunksjonen for ein stasjonær tilstand med kvantetal n ($n = 1, 2, \ldots$).

(a) Vis at bølgjefunksjonen er normalisert, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = 1$.

(b) Kva er sannsynlegheita for at ei måling av energien skal gi verdien E_n ($n = 1, 2, \ldots$)?

(c) Anta at ei slik energimåling gir måleresultatet E_2. Dersom ein ved ei seinare tid gjer ei måling av posisjonen til partikkelen, kva er sannsynlegheita for å måle denne til å vere mellom $x = L/4$ og $x = 3L/4$?

Oppgåve 3.

Sjå på ein partikkel med masse m og energi E som kjem inn mot ein rektangulær potensialbarriere med høgde U_0. Med utgangspunkt i uttrykka for transmisjonskoeffisienten T som funksjon av E gitt i notatane om tunnelering (sjå fila "tunnelering-2013.pdf" tilgjengeleg på websida):

(a) Vis at når totalenergien $E < U_0$, minkar T eksponensielt med barrierelengda L for store nok L (meir presist når argumentet αL til sinh-funksjonen i uttrykket for T er $\gg 1$).

(b) Anta at partikkelen er eit elektron ($m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg) og at barrieren har høgde $U_0 = 5$ eV og lengde $L = 1$ nm. Plott T som funksjon av E for $E > U_0$. Har du nokre kommentarar (spesielt ang. korleis oppførselen skil seg frå klassisk fysikk)?

Utvalde fasitsvar:
1a: $A = \sqrt{12/L^3}$; 1b: $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$ med $c_n = 4\sqrt{6}(-1)^{(n-1)/2}/(\pi n)^2$ for $n = 1, 3, 5, \ldots$ og $c_n = 0$ for $n = 2, 4, 6, \ldots$ 1c: $96/\pi^4 \approx 0.986$. 1d: $\langle E\rangle = 6\hbar^2/(mL^2)$.
2c: $1/2$.
3a: $T \approx 16(E/U_0)(1 - E/U_0)e^{-2\alpha L}$.