Totalspinnet til ein stiv lekam

Bevegelsen til ein stiv lekam kan sjåast på som ein kombinasjon av (i) translasjon av massesenteret (c.m.) og (ii) rotasjon om ein akse som går gjennom massesenteret.

For ein stiv lekam som er tilstrekkjeleg[1] symmetrisk omkring rotasjonsaksen gj. c.m. kan det visast at spinnet $\vec{L}$ kan uttrykkjast som (vi gir ikkje beviset)

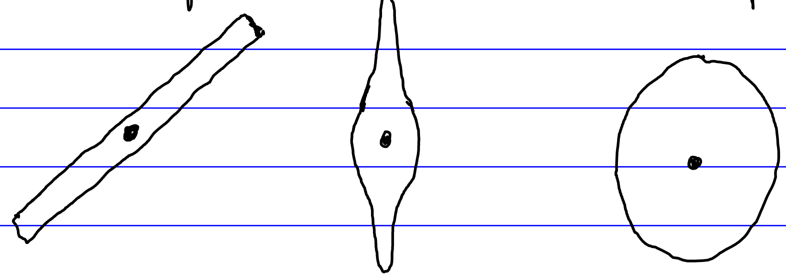
$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times M\vec{V}}_{\text{"banespinn"}} + \underbrace{I\vec{\omega}}_{\text{"eigenspinn"}} \qquad (*)$$

Det første leddet, $\vec{R} \times M\vec{V}$, kallast banespinnet. Her er M massen til lekamen, $\vec{R}$ er posisjonen til c.m. og $\vec{V}$ er hastigheiten til c.m. Banespinnet er bidraget til $\vec{L}$ frå bevegelsen av c.m. Det andre leddet, $I\vec{\omega}$, kallast eigenspinnet. Her er $\vec{\omega}$ vinkelhastigheitsvektoren for rotasjonen om aksen gj. c.m. og I er treghetsmomentet mht. denne aksen. Spinnet $\vec{L}$, dvs. summen av banespinn og eigenspinn, kallast ofte total-spinnet.

Merk at $\vec{R}$ er vektoren frå referansepunktet O til c.m. Banespinnet avheng difor av vårt val av O. Eigenspinnet er uavhengig av O.

1) "Tilstrekkjeleg symmetrisk" betyr her at kvart tverrsnitt av lekamen vinkelrett på rotasjonsaksen må ha refleksjonssymmetri om aksen.

Døme på tverrsnitt med refleksjonssymmetri:

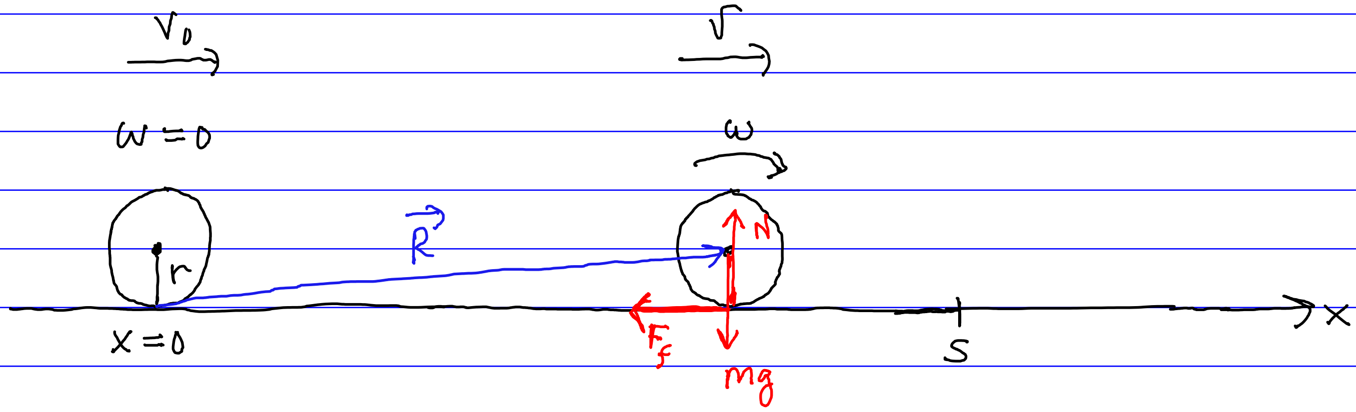


(• = c.m., rotasjonsaksen ⊥ planet)

Tverrsnittet til høgre har i tillegg sylindersymmetri. Lekamar med sylindersymmetri om rotasjonsaksen har altså "meir enn nok" symmetri til at $\vec{L}$ kan skrivast på forma (*).

Eksempel:

Ei bowlingkule blir kasta på ei bowlingbane. Når kula treff underlaget har den fart v_0 og ingen rotasjon ($\omega = 0$). Den sklir ei strekning s før den byrjar å rulle reint. Finn farten kula har då. Kva er s?



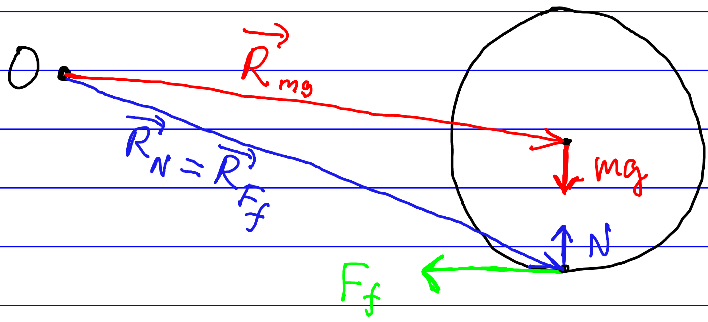
I sklifasen ($x \leq s$) verkar det ei friksjonskraft F_f på kula. Dette er ei kinetisk friksjonskraft

$$\Rightarrow \quad |\vec{F}_f| = \mu_k N = \mu_k mg$$

$x=0$: $v = v_0$, $\omega = 0$

$x \geq s$: $v = ?$, $\omega = v/R$ (rein rulling)

Ein kan sjølvsagt løyse dette problemet vha. N2 for translasjon og rotasjon på vanleg måte. Men vi skal no vise at ved eit "smart" val av referansepunkt er (total-)spinnet til kula bevart, som kan brukast til enkelt å finne v.



($\vec{R}_i$ er vektoren frå O til angrepspunktet for krafta i)

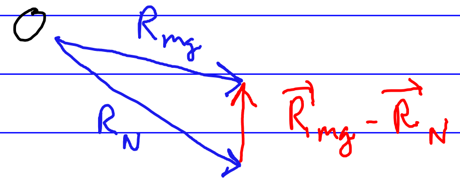
For eit <u>vilkårleg</u> referansepunkt O har vi (sjå figur)

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{mg} \times m\vec{g} + \vec{R}_N \times \vec{N} + \vec{R}_{F_f} \times \vec{F}_f$$

$$= (\vec{R}_{mg} - \vec{R}_N) \times m\vec{g} + \vec{R}_{F_f} \times \vec{F}_f$$

(sidan $\vec{N} = -m\vec{g}$ på flatt underlag)

Sidan $\vec{R}_{mg} - \vec{R}_N$ er parallell med $m\vec{g}$ er $(\vec{R}_{mg} - \vec{R}_N) \times m\vec{g} = 0$.



$$\Rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{R}_{F_f} \times \vec{F}_f$$

For eit generelt referansepunkt O er då $\vec{\tau} \neq 0$. Sidan $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ er då spinnet $\vec{L}$ ikkje bevart.

Men dersom vi let O vere eit punkt på underlaget blir $\vec{R}_{F_f}$ parallell med $\vec{F}_f$ $\Rightarrow$ $\vec{R}_{F_f} \times \vec{F}_f = 0$! Sagt på ein annan måte: Då har $\vec{F}_f$ null arm.

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ er bevart}$$

La oss setje opp eit uttrykk for totalspinnet $\vec{L}$ til kula. Som referansepunkt O vel vi punktet på underlaget ved $x = 0$.

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times m\vec{v}}_{\text{banespinn}} + \underbrace{I\vec{\omega}}_{\text{eigenspinn}}$$

Både banespinnet og eigenspinnet peikar inn i planet (sjå figur s. 2 ; bruk högrehandsreglar). La $L = |\vec{L}|$.

$$L = m|\vec{R} \times \vec{v}| + I|\vec{\omega}| = mrv + I\omega$$

Sidan v og ω avheng av x blir L ein funksjon av x : $L = L(x)$.

$$L(0) = mrv_0 + I \cdot 0 = mrv_0$$

Spinnbevaring: $L(x) = L(0) \Rightarrow mrv + I\omega = mrv_0$

For $x \geq s$ har vi i tillegg at $\omega = v/r$ (betingelsen for rein rulling)

$$\Rightarrow mrv + I\frac{v}{r} = mrv_0$$

($I = \frac{2}{5}mr^2$ for kule som roterer om akse gj. c.m.)

$$\Rightarrow \underline{\underline{v}} = \frac{v_0}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{v_0}{1 + \frac{2}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{7}v_0}}$$

Kva er s? I sklifasen verkar kinetisk friksjonskraft $\vec{F_f}$ i negativ x-retn. Bruk N2 i x-retn.:

$$ma = F_f = -\mu_k mg \Rightarrow a = -\mu_k g.$$

a konstant $\Rightarrow$ kan bruke $v^2 - v_0^2 = 2as$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 1\right]v_0^2 = 2(-\mu_k g)s \Rightarrow \underline{s = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_k g}}$$